ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Το **διάνυσμα** ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος και το δεύτερο άκρο λέγεται **πέρας** του διανύσματος. Ένα διάνυσμα ορίζεται και ως το **διατεταγμένο ζεύγος** των σημείων Α και Β και συμβολίζεται και ως (Α, Β).

Ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο Α και πέρας το σημείο Β συμβολίζεται ως $\overrightarrow{AB}$ και παριστάνεται μ' ένα βέλος που ξεκινάει από το σημείο Α και καταλήγει στο σημείο Β. Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε έχουμε το λεγόμενο **μηδενικό διάνυσμα** που συμβολίζεται ως $\overrightarrow{AA}$ ή και ως $\vec{0}$.

Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος, δηλ. το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος ΑΒ και συμβολίζεται με $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Αν το διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με 1, τότε λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα**.

Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **φορέας** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ που έχουν τον ίδιο και ή και παράλληλους φορείς λέγονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά διανύσματα**. Λέμε ακόμη ότι έχουν ίδια διεύθυνση και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα** όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες ΑΒ και ΓΔ περιέχει την άλλη. Λέμε τότε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα** όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Λέμε τότε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση (ομόρροπα) και ίσα μέτρα. Γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$.

ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίθετα** όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση (αντίρροπα) και ίσα μέτρα. Γράφουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ισχύει $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Από ένα σημείο Ο παίρνουμε δύο άλλα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$. Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ που σχηματίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ αποκαλούμε **γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$** και τη συμβολίζουμε με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ ή $(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$ ή και μ' ένα μικρό γράμμα, π.χ. **θ**.

Η γωνία αυτή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου Ο και ισχύει $0^o \le \theta \le 180^o$ ή σε ακτίνια $0 \le \theta \le \pi$.

Ισχύει ακόμη:
$\theta = 0$ αν $\alpha \uparrow\uparrow \beta$
$\theta = \pi$ αν $\alpha \uparrow\downarrow \beta$

Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Το μηδενικό διάνυμα θεωρείται ότι είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή και κάθετο προς κάθε άλλο διάνυσμα.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Από ένα σημείο Ο παίρνουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και μετά με αρχή το σημείο Α παίρνουμε ένα άλλο διάνυσμα $\overrightarrow{AM} = \vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ που προκύπτει λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται ως $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Ο.

Ισχύει και ο **κανόνας του παραλληλογράμμου**: Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και το άθροισμα των δύο διανυσμάτων ορίζεται από τη διαγώνιο ΟΜ του παραλληλογράμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις ΟΑ και ΟΒ.

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές μας ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$	(αντιμεταθετική ιδιότητα)
$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$	(προσεταιρισιτκή ιδιότητα)
$\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$	(ουδέτερο στοιχείο)
$\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$	(αντίθετο στοιχείο)

Για να προσθέσουμε πολλά διανύσματα, τα κάνουμε να είναι διαδοχικά, δηλ. το πέρας του ενός να είναι η αρχή του επομένου, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και ως πέρας το πέρας του τελευταίου διανύσματος.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Η διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$

Ισχύει και εδώ ο κανόνας του παραλληλογράμμου: Για να αφαιρέσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ από ένα άλλο διάνυσμα $\vec{\alpha}$, είτε προσθέτουμε στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ το αντίθετο του $\vec{\beta}$ και παίρνουμε τη διαγώνιο ΟΜ του παραλληλογράμμου που δημιουργείται ή με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και η διαφορά των δύο διανυσμάτων ορίζεται από τη διαγώνιο ΒΑ του παραλληλογράμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις ΟΑ και ΟΒ.

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ

Αν θεωρήσουμε ως Ο ένα σταθερό σημείο του χώρου, τότε για κάθε σημείο Μ του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσης** του Μ ή **διανυσματική ακτίνα** του Μ. Το σημείο Ο, που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στον χώρο.

Αν Ο είναι λοιπόν ένα σημείο αναφοράς στον χώρο, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ του χώρου ισχύει: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ και συνεπώς:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατός του μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του.

ΜΕΤΡΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ισχύει ότι το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων και μεγαλύτερο ή ίσο από την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων των δύο διανυσμάτων:

$$\left|\left|\vec{\alpha}\right| - \left|\vec{\beta}\right|\right| \le \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|$$

Ισχύουν τα εξής:

- Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους αν τα δύο διανύσματα είναι ομόρροπα.
- Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων τους αν τα δύο διανύσματα είναι αντίρροπα.
- Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους και με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων τους αν ένα από τα δύο διανύσματα είναι το μηδενικό διάνυσμα.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ονομάζουμε **γινόμενο** ενός πραγματικού αριθμού $\lambda \neq 0$ μ' ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda.\vec{\alpha}$ ή $\overrightarrow{\lambda\alpha}$, ένα άλλο διάνυσμα που:

- είναι ομόρροπο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$
- είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$
- έχει μέτρο ίσο με $|\lambda|\|\vec{\alpha}|$

Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως γινόμενο $\lambda.\vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$. Το γινόμενο $\overrightarrow{\frac{1}{\lambda}.\alpha}$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$.

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$$
$$(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$$
$$\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$$
$$1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{\nu} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in R$.

΄Ενα διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ λέγεται **γραμμικά ανεξάρτητο**, ενώ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ λέγεται **γραμμικά εξαρτημένο**.

Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα** όταν ένα τουλάχιστον απ' αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός του άλλου, δηλ. αν υπάρχει $\lambda \in R$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ ή $\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$. Δύο διανύσματα που δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα**. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Δύο διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα αν είναι παράλληλα μεταξύ τους και είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους.

Τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα όταν ένα τουλάχιστον απ' αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο, δηλ. αν υπάρχουν λ, μ ∈ R, ώστε να ισχύει $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma}$ ή $\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\gamma}$ ή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Τρία διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα αν είναι συνεπίπεδα, ενώ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν είναι συνεπίπεδα.

Τέσσερα διανύσματα είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

Ισχύουν τα εξής:

Αν $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Αν $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \kappa = \lambda = \mu = 0$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Αν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι παράλληλα, αλλά και αντίστροφα αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός λ ∈ R τέτοιος ώστε να ισχύει $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$.

Αν έχουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς Ο και πάρουμε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ, τότε ισχύει το εξής για τη **διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος**:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Δηλαδή **η** διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ίση με το ημιάθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Αν πάνω σ' ένα επίπεδο σχεδιάσουμε δύο κάθετους άξονες x'x και y'y με κοινή αρχή το σημείο Ο και **μοναδιαία διανύσματα** το $\vec{i}$ για τον άξονα x'x και το $\vec{j}$ για τον άξονα y'y, τότε λέμε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και το συμβολίζουμε με **Oxy**.

Το σύστημα Oxy είναι **ορθοκανικό** γιατί είναι **ορθογώνιο** καθώς οι άξονες x'x και y'y είναι κάθετοι μεταξύ τους και είναι και **κανονικό** καθώς τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι ισομήκη με μήκος ίσο με τη μονάδα.

Σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων, συγκεκριμένα η **τετμημένη x** αν φέρουμε την κάθετο ως προς τον άξονα x'x και η **τεταγμένη y** αν φέρουμε την κάθετο ως προς τον άξονα y'y. Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου Μ λέγονται **συντεταγμένες** του Μ.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλ. σε κάθε ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου. Ένα σημείο Μ του επιπέδου με τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται ως **Μ(x, y)** και ως **(x, y)**.

Κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ του επιπέδου μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως **γραμμικός συνδυασμός** των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$:

$$\boxed{\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{a}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί x και y λέγονται **συντεταγμένες** του διανύσματος $\vec{a}$ στο σύστημα Oxy, όπου το **x** είναι η **τετμημένη** και το **y** είναι η **τεταγμένη**.

Ισχύει το εξής:
Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες.

Ένα διάνυσμα μπορούμε να το συμβολίσουμε και με το διατεταγμένο ζεύγος (x, y).

Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου, τότε μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες του αθροί-

σματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, του γινομένου $\lambda\vec{\alpha}$, όπου $\lambda \in R$, και γενικότερα κάθε γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.

Για κάθε γραμμικό συνδυασμό $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

$$\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \end{bmatrix}$$

Για τις συντεταγμένες (x, y) του μέσου Μ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ισχύουν τα εξής:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Στην περίπτωση τώρα που γνωρίζουμε τα άκρα $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ενός διανύσματος, τότε για να βρούμε τις συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος που έχει άκρα τα σημεία Α και Β, ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} x &= x_2 - x_1 \\ y &= y_2 - y_1 \end{aligned}$$

Το μέτρο (μήκος) ενός διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ισχύει ότι για να είναι παράλληλα δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου αρκεί να είναι ίση με το μηδέν η ορίζουσα που έχει ως $1^η$ πρώτη γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και ως $2^η$ γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\beta}$ και που λέγεται **ορίζουσα των διανυσμάτων** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$:

$$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ = (x, y), με x ≠ 0, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με **λ**:

$$\lambda = \frac{y}{x} = \varepsilon\phi\phi$$

όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x'x.

Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο με τον άξονα x'x και έχουμε y = 0, τότε λ = 0, ενώ αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο με τον άξονα y'y και έχουμε x = 0, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

Συνεπώς, για να είναι παράλληλα δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (x_1, y_1) και $\vec{\beta}$ = (x_2, y_2) με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, ισχύει:

$$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Για ένα διάνυσμα $\vec{a}$ που είναι παράλληλο με τον άξονα x'x, ονομάζεται **αλγεβρική τιμή** και συμβολίζεται με $\bar{\alpha}$, το μέτρο του $\vec{a}$ χωρίς πρόσημο. Δηλ. για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ // x'x ισχύει:

$\vec{a} = \bar{\alpha} . \vec{i}$

$\bar{\alpha} = \left|\vec{a}\right| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{i}$

$\bar{\alpha} = -\left|\vec{a}\right| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{i}$

$\bar{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Αν έχουμε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β και Γ ένα σημείο της ευθείας ΑΒ διαφορετικό από το Β, τότε ονομάζεται **μερικός λόγος** ή **απλός λόγος (Α, Β, Γ)** ο λόγος $\lambda = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}}$. Για λ = 1 το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Αν λ = 0, τότε το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Α, ενώ δεν ορίζεται σημείο Μ με λ = -1.

Ισχύουν τα εξής:

Αν (Α, Β, Γ) = 0 ⇔ τα σημεία Β και Γ συμπίπτουν

Αν (Α, Β, Γ) > 0 ⇔ το σημείο Γ βρίσκεται ανάμεσα στα Α και Β

Αν (Α, Β, Γ) < 0 ⇔ το σημείο Γ βρίσκεται έξω από το τμήμα ΑΒ

Αν τώρα Ο είναι ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, τότε ισχύει:

$$(A,B,\Gamma) = \lambda \Leftrightarrow \overline{O\Gamma} = \frac{\overline{OA} + \lambda\overline{OB}}{1+\lambda}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ονομάζουμε **εσωτερικό** ή **αριθμητικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha}.\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|.|\vec{\beta}|.\sigma\upsilon\nu\phi$$

όπου φ είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}.\vec{\beta} = 0$

Ισχύουν τα εξής:

$\vec{\alpha}.\vec{\beta} = \vec{\beta}.\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}.\vec{\beta} = 0$

Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}.\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|.|\vec{\beta}|$

Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}.\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|.|\vec{\beta}|$

$\vec{\alpha}.\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2$

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$

$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = 1$

Προσοχή - Δεν ισχύει:

$(\vec{\alpha}.\vec{\beta}).\vec{\gamma} = \vec{\alpha}.(\vec{\beta}.\vec{\gamma})$

Ισχύει το εξής:

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Δηλαδή, αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε ισχύει:

$$\vec{\alpha}.\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Ισχύουν τα εξής:

$(\lambda\vec{\alpha}).\vec{\beta} = \vec{\alpha}.(\lambda\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha}.\vec{\beta})$

$\vec{\alpha}.(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}.\vec{\beta} + \vec{\alpha}.\vec{\gamma}$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1.\lambda_2 = -1$

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

Το **συνημίτονο** της γωνίας θ που σχηματίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{συν}\theta = \frac{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|.|\vec{\beta}|}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}.\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}}$$

$$\eta\mu\theta = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}.\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}}$$

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1x_2 + y_1y}$$

Αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\nu}$ και πάρουμε την κάθετη **προβολή** του $\vec{\nu}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$, τότε θα ισχύει το εξής για τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων:

$$\vec{\alpha}.\vec{\nu} = \vec{\alpha}.\text{προβ}_{\alpha}\vec{\nu}$$

Δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το γινόμενο της αλγεβρικής τιμής του ενός διανύσματος επί την ορθογώνια προβολή του άλλου διανύσματος πάνω σε άξονα που έχει τη διεύθυνση και τη φορά του πρώτου διανύσματος.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δεν μεταβάλλεται αν το ένα απ' αυτά το αντικαταστήσουμε με την ορθή προβολή του πάνω στον φορέα του άλλου διανύσματος.

Η αλγεβρική τιμή της ορθής προβολής ενός διανύσματος πάνω σ' έναν άξονα είναι ίση με το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος επί το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα.

Αν σ' ένα εσωτερικό γινόμενο, το ένα από τα διανύσματα πολλαπλασιαστεί μ' έναν πραγματικό αριθμό k, τότε το εσωτερικό γινόμενο πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.

Ισχύουν τα εξής :

$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{\alpha}.\vec{\beta}$

$(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{\alpha}.\vec{\beta}$

$(\vec{\alpha}+\vec{\beta}).(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ονομάζουμε **εξωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\,X\,\vec{\beta}$, ένα άλλο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που προκύπτει απ' αυτά τα δύο και ισχύουν γι' αυτό τα εξής:

- έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων επί το ημίτονο της μεταξύ τους γωνίας.
- διεύθυνση κάθεση στο επίπεδο που ορίζουν τα δύο διανύσματα.
- φορά τέτοια ώστε το σύστημα των τριών διανυσμάτων να είναι δεξιόστροφο.

$$\vec{\alpha}\,X\,\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|.|\vec{\beta}|.\eta\mu\phi$$

Ισχύει το εξής:

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα αυτά.

Ισχύουν τα εξής:

$\vec{\alpha}\ X\ \vec{\beta} = -\vec{\beta}\ X\ \vec{\alpha}$

$(\lambda\vec{\alpha})\ X\ \vec{\beta} = \vec{\alpha}\,X\,(\lambda\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha}\,X\,\vec{\beta})$

$\vec{\alpha}\ X\ \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ ή $\vec{\alpha}\ //\ \vec{\beta}$

$\vec{i}\ X\ \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\ X\ \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\ X\ \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{\alpha}\ X\ (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\ X\ \vec{\beta} + \vec{\alpha}\ X\ \vec{\gamma}$ (επιμεριστική ιδιότητα)

Υπάρχει και η **αλγεβρική έκφραση** του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$ με συντεταγμένες στον τριοδιάστατο χώρο:

$$\vec{\alpha}X\vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

ΤΡΙΠΛΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Υπάρχουν δύο ειδών τριπλά γινόμενα διανυσμάτων, το *βαθμωτό τριπλό* ή *μικτό γινόμενο διανυσμάτων* και το *διανυσματικό τριπλό* ή *δις εξωτερικό* γινόμενο διανυσμάτων.

Το **βαθμωτό τριπλό** ή **μικτό γινόμενο διανυσμάτων** τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο του ενός επί το εξωτερικό γινόμενο των άλλων δύο:

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \text{ X } \vec{\beta}).\vec{\gamma}$$

Το γινόμενο αυτό είναι ένας πραγματικός αριθμός και η απόλυτη τιμή του εκφράζει τον **όγκο του παραλληλεπιπέδου** που ορίζεται από τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα. Αν τα τρία αυτά διανύσματα είναι συνεπίπεδα, τότε το βαθμωτό τριπλό ή μικτό γινόμενό τους θα είναι ίσο με 0.

Η **αλγεβρική έκφραση** του μικτού γινομένου τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3, z_3)$ με συντεταγμένες στον τριοδιάστατο χώρο είναι η εξής:

$$\vec{\alpha} X \vec{\beta} X \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Το **διανυσματικό τριπλό** ή **δις εξωτερικό γινόμενο** τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο του ενός επί το εξωτερικό γινόμενο των άλλων δύο:

$$(\vec{\alpha} \text{ X } \vec{\beta}) \text{ X } \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \text{ X } (\vec{\beta} \text{ X } \vec{\gamma})$$

Το γινόμενο αυτό είναι προφανώς ένα άλλο διάνυσμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\gamma}\right|$
2. Να αποδειχθεί ότι ένα σημείο G είναι το βαρύκεντρο (σημείο τομής των διαμέσων) ενός τριγώνου αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$ και αν G είναι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε για ένα οποιοδήποτε σημείο Ο ισχύει: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$.
3. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε τα διανύσματα (x, 1) και (4, x) να είναι ομόρροπα.
4. Ποιο διάνυσμα είναι συγγραμμικό με το (3, 4) και έχει διπλάσιο μέτρο απ' αυτό;
5. Να αποδειχθεί ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα ενός επιπέδου μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός δύο άλλων μη συγγραμμικών διανυσμάτων του ίδιου επιπέδου.
6. Να βρεθεί η προβολή ενός διανύσματος $\vec{\nu}$ πάνω σ' ένα άλλο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ αν το μέτρο του $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}$, το μέτρο του $\vec{\nu} = \sqrt{3}$ και η γωνία των δύο αυτών διανυσμάτων είναι ίση με $\frac{\pi}{6}$.
7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (3, 1) και $\vec{\nu}$ = (1, 2). Να αναλυθεί το $\vec{\nu}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, ώστε η μία απ' αυτές να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
8. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (1, 0) και $\vec{\beta}$ = (1, 1), να βρεθεί ο λ ∈ R, ώστε (i) τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους και (ii) τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.
9. Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο διάνυσμα (3, -2) και έχουν μέτρο ίσο με 1.
10. Αν τα διανύσματα (κ, λ) και (μ, ν) είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν μέτρα ίσα με τη μονάδα, να αποδειχθεί ότι $(κν - λμ)^2 = 1$.
11. Να εξεταστεί αν τα σημεία Α(0, -2), Β(-2, -1) και Γ(2, 2) ορίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.
12. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α(4, 0), Β(7, 8), Γ(0, 10) και Δ(-3, 2) είναι κορυφές παραλληλογράμμου.
13. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α(8, 0), Β(6, 6), Γ(-3, 3) και Δ(-1, -3) είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
14. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α(10, 8), Β(-3, 9), Γ(-4, -4) και Δ(9, -5) είναι κορυφές τετραγώνου.
15. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α(-3, -7), Β(0, -2) και Γ(6, 8) βρίσκονται πάνω σε ευθεία.
16. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α(-1, -3), Β(8, 3), Γ(3, 4) και Δ(0, 2) είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.
17. Να βρεθεί το x, ώστε τα σημεία Α(x, -3), Β(1, 1) και Γ(-4, 3) να βρίσκονται πάνω σε ευθεία.

18. Να αναλυθεί το διάνυσμα (-5, 4) σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς τα διανύσματα (-1, 2) και (3, 0).
19. Να βρεθεί για ποια τιμή του x τα σημεία Α (x, 3), Β(-1, x) και Γ(2x, 4) είναι συνευθειακά.
20. Να βρεθεί ένα διάνυσμα που να έχει μέτρο ίσο με 5 και να είναι κάθετο στο διάνυσμα (1, 2).