ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Είναι γνωστό από τη Γεωμετρία ότι το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου είναι ίσο με 2πρ, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου. Ορίζουμε ως ***α-κτίνιο (rad)*** ένα τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου του και μπορούμε να βρούμε ότι η γωνία του τόξου αυτού είναι ίση με 360/2π ή $57{,}3^{o}$.

Ανάμεσα στις μοίρες και τα ακτίνια ισχύουν τα εξής :

$$\boxed{\frac{\mu}{360}=\frac{\alpha}{\pi}}$$

Όπου μ είναι οι μοίρες μιας γωνίας και α η τιμή της ίδιας γωνίας σε ακτίνια.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Ορισμοί

Ημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της α-πέναντι καθέτου πλευράς προς την υποτείνουσα και συμβολίζεται με τα γράμματα *ημ*.

Συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της καθέτου πλευράς προς την υποτείνουσα και συμβολίζεται με τα γράμματα ***συν***.

Το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας λαμβάνουν τιμές από -1 έως +1 (κλειστό διάστημα).

Ισχύουν τα εξής :

$$\boxed{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1,\ \eta\mu\omega=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega},\ \sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt{1-\eta\mu^2\omega},}$$

Εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της απέναντι καθέτου πλευράς προς την προσκείμενη κάθετο πλευρά και συμβο-λίζεται με τα γράμματα ***εφ***.

Συνεφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της προσκείμενης καθέτου πλευράς προς την απέναντι κάθετο πλευρά και συμβολίζεται με τα γράμματα ***σφ***.

Η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη μιας γωνίας είναι αριθμοί αντίστροφοι.

Ισχύουν τα εξής :

$$\text{εφωσφω} = 1,\ \varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega},\ \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

Τριγωνομετρικός κύκλος λέγεται ο κύκλος του οποίου η ακτίνα λαμβάνεται ως μονάδα και επί του οποίου έχει ορισθεί η αρχή και η θετική φορά των αξόνων. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των συνημιτόνων και ο κάθετος άξονας είναι ο άξονας των ημιτόνων.

Ημίτονο ενός τόξου λέγεται το μήκος της προβολής της τελικής ακτίνας στον άξονα των ημιτόνων και συνημίτονο ενός τόξου λέγεται το μήκος της προβολής της τελικής ακτίνας στον άξονα των συνημιτόνων.

Αν είναι ημx = ημα, τότε : x = 2kπ+α ή x = (2k+1)π – α, όπου k ακέραιος Ισχύει : $-1 \le$ ημx $\le +1$ ή $\lvert \eta\mu x \rvert \le 1$

Αν είναι συνx = συνα, τότε : x = 2kπ±α, όπου k ακέραιος Ισχύει : $-1 \le$ συνx $\le +1$ ή $\lvert \sigma\upsilon\nu x \rvert \le 1$
Αν είναι εφx = εφα, τότε : x = kπ+α, όπου k ακέραιος

Αν είναι σφx = σφα, τότε : x = kπ+α, όπου k ακέραιος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΗΜΩΝ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τεταρτημόριο	1ο	2ο	3ο	4ο
ημίτονο	+	+	–	–
συνημίτονο	+	–	–	+
εφαπτομένη	+	–	+	–
συνεφαπτομένη	+	–	+	–

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τόξο	**0^o**	**0-90^o**	**90^o**	**90^o-180^o**	**180^o**	**180^o-270^o**	**270^o**	**270^o-360^o**	**360^o**
ημίτονο	0	↗	1	↘	0	↘	–1	↗	0
συνημίτονο	1	↘	0	↘	–1	↗	0	↗	1
εφαπτομένη	0	↗	+∞/ –∞	↗	0	↗	+∞/ –∞	↗	0
συνεφαπτομένη	–∞	↘	0	↘	+∞/ –∞	↘	0	↘	+∞/ –∞

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 45^o, 30^o και 60^o

Ισχύουν τα εξής :

$$ημ45^o = \frac{\sqrt{2}}{2},\ συν45^o = \frac{\sqrt{2}}{2},\ εφ45^o = 1,\ σφ45^o = 1$$

$$ημ30^o = \frac{1}{2},\ συν30^o = \frac{\sqrt{3}}{2},\ εφ30^o = \frac{\sqrt{3}}{3},\ σφ30^o = \sqrt{3}$$

$$ημ60^o = \frac{\sqrt{3}}{2},\ συν30^o = \frac{1}{2},\ εφ60^o = \sqrt{3},\ σφ60^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η κάθε κάθετος πλευρά είναι ίση με την υποτείνουσα επί το ημίτονο της απέναντι γωνίας ή επί το συνημίτονο της προσκείμενης γωνίας.

$$β = αημΒ,\ β = ασυνΓ$$
$$γ = αημΓ,\ γ = ασυνΒ$$

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η κάθε κάθετος πλευρά είναι ίση με την άλλη κάθετο πλευρά επί την εφαπτομένη της απέναντι γωνίας ή επί τη συνεφαπτομένη της προσκείμενης γωνίας.

$$β = γεφΒ,\ β = γσφΓ$$
$$γ = βεφΓ,\ γ = βσφΒ$$

Στις συμπληρωματικές γωνίες, το ημίτονο της μιας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας είναι ίση με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

$$ημB = συνΓ,\ ημΓ = συνB$$
$$εφB = σφΓ,\ εφΓ = σφB$$
ή
$$ημ(90^o – ω) = συνω,\ συν(90^o – ω) = ημω$$
$$εφ(90^o – ω) = σφω,\ σφ(90^o – ω) = εφω$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ισχύουν τα εξής :

$$ημω = \sqrt{1-συν^2ω},\ συνω = \sqrt{1-ημ^2ω}$$
$$ημ^2ω = \frac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω},\ ημω = \frac{εφω}{\sqrt{1+εφ^2ω}}$$
$$συν^2ω = \frac{1}{1+εφ^2ω},\ συνω = \frac{1}{\sqrt{1+εφ^2ω}}$$
$$ημ^2ω = \frac{1}{1+σφ^2ω},\ ημω = \frac{1}{\sqrt{1+σφ^2ω}}$$
$$συν^2ω = \frac{σφ^2ω}{1+σφ^2ω},\ συνω = \frac{σφω}{\sqrt{1+σφ^2ω}}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Ισχύουν τα εξής :

$$ημ2ω = 2ημωσυνω$$
$$συν2ω = συν^2ω – ημ^2ω$$
$$συν2ω = 2συν^2ω – 1$$
$$συν2ω = 1 – 2ημ^2ω$$
$$εφ2ω = \frac{2εφω}{1-εφ^2ω}$$
$$σφ2ω = \frac{σφ^2ω-1}{2σφω}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$ημ(π – ω) = ημω$$
$$συν(π – ω) = –συνω$$
$$εφ(π – ω) = –εφω$$
$$σφ(π – ω) = –σφω$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Θεώρημα των Ημιτόνων

Η κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι ανάλογη προς το ημίτονο της απέναντι γωνίας και ο λόγος αυτός είναι ίσος με την διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu \mathrm{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$
$$α = 2RημA$$
$$β = 2RημB$$
$$γ = 2RημΓ$$

Θεώρημα των Συνημιτόνων

Το τετράγωνο της μιας πλευράς ενός τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών μείον το γινόμενο των άλλων δύο πλευρών επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας.

$$α^2 = β^2 + γ^2 – 2βγσυνA$$
$$β^2 = α^2 + γ^2 – 2αγσυνB$$
$$γ^2 = α^2 + β^2 – 2αβσυνΓ$$
$$\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$
$$\sigma\upsilon\nu \mathrm{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$$
$$\sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Αν συμβολίσουμε με τ την ημιπερίμετρο ενός τριγώνου, δηλαδή α+β+γ=2τ, ισχύουν τα εξής :

$$\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}},\ \sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

$$\eta\mu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-a)(\tau-\gamma)}{a\gamma}},\ \sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\alpha\gamma}}$$

$$\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}},\ \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ισχύουν τα εξής :

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma,\ \mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\gamma\eta\mu\mathrm{B}$$

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\alpha,\ \mathrm{E}=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

$$\mathrm{E}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

(Τύπος του Ήρωνος)

Ε=τρ

όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου

$$\rho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$$

$\boldsymbol{E=(\tau-\alpha)R_\alpha,\ E=(\tau-\beta)R_\beta,\ E=(\tau-\gamma)R_\gamma}$

όπου R_α, R_β και R_γ είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων στο τρίγωνο κύκλων

ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν τα εξής :

$$\rho = (\tau - \alpha)\varepsilon\phi\frac{A}{2},\ \rho = (\tau - \beta)\varepsilon\phi\frac{B}{2},\ \rho = (\tau - \gamma)\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}$$

$$\sigma\phi\frac{A}{2} = \frac{\tau - \alpha}{\rho},\ \sigma\phi\frac{B}{2} = \frac{\tau - \beta}{\rho}, \sigma\phi\frac{\Gamma}{2} = \frac{\tau - \gamma}{\rho}$$

$$R_\alpha = \tau.\varepsilon\phi\frac{A}{2}, R_\beta = \tau.\varepsilon\phi\frac{B}{2}, R_\alpha = \tau.\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}$$

Ύψη Τριγώνου :

$$\upsilon_\alpha = \beta\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu B = \frac{2E}{\alpha}$$

$$\upsilon_\beta = \alpha\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu A = \frac{2E}{\beta}$$

$$\upsilon_\gamma = \beta\eta\mu A = \alpha\eta\mu B = \frac{2E}{\gamma}$$

Διχοτόμοι Τριγώνου :

$$\delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta + \gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}, \delta_\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}, \delta_\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

Εξωτερικές Διχοτόμοι Τριγώνου :

$$\Delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{|\gamma - \beta|}\eta\mu\frac{A}{2}, \Delta_\beta = \frac{2\alpha\gamma}{|\alpha - \gamma|}\eta\mu\frac{B}{2}, \Delta_\gamma = \frac{2\alpha\beta}{|\alpha - \beta|}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

Διάμεσοι Τριγώνου :

$$4\mu_\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$4\mu_\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$$

$$4\mu_\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

$$\varepsilon\phi A + \varepsilon\phi B + \varepsilon\phi\Gamma = \varepsilon\phi A\varepsilon\phi B\varepsilon\phi\Gamma$$

$$\sigma\phi A\sigma\phi B + \sigma\phi B\sigma\phi\Gamma + \sigma\phi\Gamma\sigma\phi A = 1$$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ MOLLWEIDE

Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν τα εξής :

$$\eta\mu\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\phi\frac{\mathrm{A}}{2}$$

Θεώρημα των Εφαπτομένων

$$\frac{\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}}{\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}$$

Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$, τότε ισχύει ημx < x < εφx, όπου x σε ακτίνια.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ α+β+γ

Ισχύουν τα εξής :

$$\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$$

$$\varepsilon\phi(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta+\varepsilon\phi\gamma-\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta\varepsilon\phi\gamma}{1-\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta-\varepsilon\phi\beta\varepsilon\phi\gamma-\varepsilon\phi\gamma\varepsilon\phi\alpha}$$

$$\sigma\phi(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma-\sigma\phi\alpha-\sigma\phi\beta-\sigma\phi\gamma}{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta+\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma+\sigma\phi\gamma\sigma\phi\alpha-1}$$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΟΞΟΥ ΣΤΟ 1$^{\text{ο}}$ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Ισχύουν τα εξής :

$$\eta\mu(2k\pi+\alpha) = \eta\mu\alpha,\ \sigma\upsilon\nu(2k\pi+\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha,$$
$$\varepsilon\varphi(2k\pi+\alpha) = \varepsilon\varphi\alpha,\ \sigma\varphi(2k\pi+\alpha) = \sigma\varphi\alpha$$

όπου k ακέραιος

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\alpha\ ,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\eta\mu\alpha$$
$$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sigma\phi\alpha\ ,\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\varepsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu(\pi-\alpha)=\eta\mu\alpha\ ,\ \sigma\upsilon\nu(\pi-\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\phi(\pi-\alpha)=-\varepsilon\phi\alpha\ ,\ \sigma\phi(\pi-\alpha)=-\sigma\phi\alpha$$

$$\eta\mu(-\alpha)=-\eta\mu\alpha\ ,\sigma\upsilon\nu(-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\phi(-\alpha)=-\varepsilon\phi\alpha\ ,\ \sigma\phi(-\alpha)=-\sigma\phi\alpha$$

$$\eta\mu(\pi+\alpha)=-\eta\mu\alpha\ ,\sigma\upsilon\nu(\pi+\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\phi(\pi+\alpha)=\varepsilon\phi\alpha\ ,\ \sigma\phi(\pi+\alpha)=\sigma\phi\alpha$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\alpha\ ,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\eta\mu\alpha$$
$$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sigma\phi\alpha\ ,\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\varepsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\alpha\ ,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\eta\mu\alpha$$
$$\varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\sigma\phi\alpha\ ,\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\varepsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\alpha\ ,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\eta\mu\alpha$$
$$\varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sigma\phi\alpha\ ,\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\varepsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu(2\pi-\alpha)=-\eta\mu\alpha\ ,\sigma\upsilon\nu(2\pi-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\phi(2\pi-\alpha)=-\varepsilon\phi\alpha\ ,\sigma\phi(2\pi-\alpha)=-\sigma\phi\alpha$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΞΩΝ

Ισχύουν τα εξής :

$$ημ(α+β) = ημασυνβ + ημβσυνα$$

$$ημ(α–β) = ημασυνβ – ημβσυνα$$

$$συν(α+β) = συνασυνβ – ημαημβ$$

$$συν(α–β) = συνασυνβ + ημαημβ$$

$$εφ(α+β) = \frac{εφα + εφβ}{1 - εφαεφβ}$$

$$εφ(α-β) = \frac{εφα - εφβ}{1 + εφαεφβ}$$

$$σφ(α+β) = \frac{σφασφβ - 1}{σφα + σφβ}$$

$$σφ(α-β) = \frac{σφασφβ + 1}{σφβ - σφα}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ 2α

Ισχύουν τα εξής :

$$ημ2α = 2ημασυνα,\ ημα = 2ημ\frac{α}{2}συν\frac{α}{2}$$

$$συν2α = συν^2α - ημ^2α,\ συνα = συν^2\frac{α}{2} - ημ^2\frac{α}{2}$$

$$συν2α = 2συν^2α - 1,\ συν2α = 1 - 2ημ^2α$$

$$συνα = 2συν^2\frac{α}{2} - 1,\ συνα = 1 - 2ημ^2\frac{α}{2}$$

$$εφ2α = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α},\ σφ2α = \frac{σφ^2α - 1}{2σφα}$$

$$εφα = \frac{2εφ\frac{α}{2}}{1 - εφ^2\frac{α}{2}},\ σφα = \frac{σφ^2\frac{α}{2} - 1}{2σφ\frac{α}{2}}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ 3α

Ισχύουν τα εξής :

$$ημ3α = 3ημα – 4ημ^3α$$

$$συν3α = 4συν^3α – 3συνα$$

$$εφ3α = \frac{3εφα - εφ^3α}{1-3εφ^2α}$$

$$σφ3α = \frac{σφ^3α - 3σφα}{3σφ^2α - 1}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ α ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ συν2α

Ισχύουν τα εξής :

$$ημ^2α = \frac{1-συν2α}{2}, \quad συν^2α = \frac{1+συν2α}{2}$$

$$εφ^2α = \frac{1-συν2α}{1+συν2α}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ α ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ $εφ\frac{α}{2}$

Ισχύουν τα εξής :

$$ημα = \frac{2εφ\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}, \quad συνα = \frac{1-εφ^2\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}$$

$$εφα = \frac{2εφ\frac{α}{2}}{1-εφ^2\frac{α}{2}}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Ισχύουν τα εξής :

$$\eta\mu \mathrm{A} + \eta\mu \mathrm{B} = 2\eta\mu \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$$

$$\eta\mu \mathrm{A} - \eta\mu \mathrm{B} = 2\eta\mu \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu \mathrm{B} = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} - \sigma\upsilon\nu \mathrm{B} = 2\eta\mu \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} \eta\mu \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}$$

$$\varepsilon\phi \mathrm{A} + \varepsilon\phi \mathrm{B} = \frac{\eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}\, \sigma\upsilon\nu \mathrm{B}}$$

$$\varepsilon\phi \mathrm{A} - \varepsilon\phi \mathrm{B} = \frac{\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}\, \sigma\upsilon\nu \mathrm{B}}$$

$$\sigma\phi \mathrm{A} + \sigma\phi \mathrm{B} = \frac{\eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\eta\mu \mathrm{A}\, \eta\mu \mathrm{B}}$$

$$\sigma\phi \mathrm{A} - \sigma\phi \mathrm{B} = \frac{\eta\mu(\mathrm{B}-\mathrm{A})}{\eta\mu \mathrm{A}\, \eta\mu \mathrm{B}}$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Ισχύουν τα εξής :

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)$$
$$2\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu(\alpha+\beta)-\eta\mu(\alpha-\beta)$$
$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$$
$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ SIMPSON

Ισχύουν τα εξής :

$$\eta\mu(\mu+1)\alpha = 2\eta\mu(\mu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu(\mu-1)\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu(\mu+1)\alpha = 2\sigma\upsilon\nu(\mu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu(\mu-1)\alpha$$

$$\eta\mu4\alpha = (4\eta\mu\alpha - 8\eta\mu^3\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu4\alpha = 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$$
$$\eta\mu5\alpha = 5\eta\mu\alpha - 20\eta\mu^3\alpha + 16\eta\mu^5\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu5\alpha = 16\sigma\upsilon\nu^5\alpha - 20\sigma\upsilon\nu^3\alpha + 5\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\eta\mu6\alpha = (6\eta\mu\alpha - 32\eta\mu^3\alpha + 32\eta\mu^5\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu6\alpha = 32\sigma\upsilon\nu^6\alpha - 48\sigma\upsilon\nu^4\alpha + 18\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $συν^2ω - ημ^2ω = 2συν^2ω - 1 = 1 - 2ημ^2ω$.
2. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{ημω}{συνω} + \frac{συνω}{ημω} = \frac{1}{ημωσυνω}$.
3. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $ημ^4ω + συν^4ω = 1 - 2ημ^2ωσυν^2ω$.
4. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{ημω}{1+συνω} + \frac{1+συνω}{ημω} = \frac{2}{ημω}$.
5. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $εφω + σφω = \frac{1}{ημωσυνω}$.
6. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $1 + εφ^2ω = \frac{1}{συν^2ω}$.
7. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $1 + σφ^2ω = \frac{1}{ημ^2ω}$.
8. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{σφω-1}{σφω+1} = \frac{1-εφω}{1+εφω}$.
9. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(ημω+συνω)^2 + (ημω-συνω)^2 = 2$.
10. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(1+εφω)(1+σφω).ημωσυνω = (ημω+συνω)^2$.
11. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{συνω}{1+ημω} + \frac{1+ημω}{συνω} = \frac{2}{συνω}$.
12. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $ημ(90^o - ω) + εφ(90^o - ω) = (1+ημω)σφω$.
13. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $ημ\frac{Α+Β}{2} = συν\frac{Γ}{2}$.
14. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $συν^2ω - ημ^2ω = \frac{1-εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$.
15. Αν ισχύει $ημω - συνω = λ$, να βρεθεί το $ημ2ω$.
16. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(ημω + συνω)^2 = 1 + ημ2ω$.
17. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(ημω - συνω)^2 = 1 - ημ2ω$.
18. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $εφω = \frac{ημ2ω}{1+συν2ω}$.
19. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $σφω - εφω = 2σφ2ω$.
20. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $εφ^2ω = \frac{1-συν2ω}{1+συν2ω}$.
21. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $ημ(Α+Β) = ημΓ$ και $συν(Α+Β) = -συνΓ$.
22. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(3ημω + 4συνω)^2 + (4ημω - 3συνω)^2 = 25$.
23. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$α^2 + β^2 + γ^2 = 4R^2(ημ^2Α + ημ^2Β + ημ^2Γ).$$
24. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$αημΑ + βημΒ + γημΓ = \frac{α^2+β^2+γ^2}{2R}.$$
25. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $α(βσυνΓ - γσυνΒ) = β^2 - γ^2$.

26. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 15^o και 75^o.
(Υπ. $15^o+75^o=90^o$ και $75^o=45^o+30^o$. Απ. $\eta\mu 15^o=\sigma\upsilon\nu 75^o=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$).
27. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου 105^o. *(Υπ. $105^o=90^o+15^o$).*
28. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $22{,}5^o$. *(Υπ. $45^o=22{,}5^o$ X 2, Απ. $\eta\mu 22{,}5^o=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$).*
29. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 18^o, 36^o, 54^o και 72^o.
(Υπ. 18^o X 2 + 18^o X 3=90^o,
Απ. $\eta\mu 18^o=\sigma\upsilon\nu 72^o=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}, \eta\mu 36^o=\sigma\upsilon\nu 54^o=\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$).
30. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$.
31. Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\alpha$.
32. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha$.
33. Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)-\eta\mu(\alpha-\beta)\eta\mu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.
34. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu\mathrm{A}+\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(45^o-\mathrm{A}\right)$.
35. Να αποδειχθεί ότι $1+\eta\mu\mathrm{A}=2\eta\mu^2\left(45^o+\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right)=2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^o-\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right)$.
36. Να αποδειχθεί ότι $1+\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}=2\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right)$.
37. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^4\dfrac{\pi}{8}+\eta\mu^4\dfrac{3\pi}{8}+\eta\mu^4\dfrac{5\pi}{8}+\eta\mu^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$.
38. Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\left(\alpha+120^o\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\alpha-120^o\right)=\dfrac{3}{2}$.
39. Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{1+\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\phi\dfrac{\alpha}{2}$.
40. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\phi^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1+\eta\mu\alpha}{1-\eta\mu\alpha}$.
41. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu 20^o\eta\mu 40^o\eta\mu 60^o\eta\mu 80^o=\dfrac{3}{16}$.
42. Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu 20^o\sigma\upsilon\nu 40^o\sigma\upsilon\nu 60^o\sigma\upsilon\nu 80^o=\dfrac{1}{16}$.
43. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\phi 20^o\varepsilon\phi 40^o\varepsilon\phi 60^o\varepsilon\phi 80^o=3$.
44. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\dfrac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=2$.
45. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha+\beta}{2}.$$
46. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

47. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 = 4\eta\mu^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$
48. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
εφ3α – εφ2α – εφα = εφ3αεφ2αεφα.
49. Να αποδειχθεί ότι 1+ημ^{2}α + ημ^{2}β > ημα + ημβ +ημαημβ.
50. Να αποδειχθεί ότι
$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma - \eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) = 4\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$
51. Να αποδειχθεί ότι
$$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma+\alpha}{2}$$
52. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\eta\mu\mathrm{A} + \eta\mu\mathrm{B} + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$
53. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu\mathrm{B} + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + 4\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}.$$
54. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu^2\mathrm{B} + \sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$
55. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
2βγσυνΑ + 2αγσυνΒ + 2αβσυνΓ = α^2 + β^2 + γ^2.
56. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2} = \frac{\varepsilon\phi\Gamma}{\varepsilon\phi\mathrm{B}}$.
57. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει βσυνΓ + γσυνΒ = α.
58. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
αημ(Β–Γ) + βημ(Γ–Α) + γημ(Α–Β) = 0.
59. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
(β+γ)συνΑ + (γ+α)συνΒ + (α+β)συνΓ = 2τ.
60. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}.$$
61. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση ημ^{2}Α = ημ^{2}Β + ημ^{2}Γ, τότε να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.
62. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση α = 2βσυνΓ, τότε να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.
63. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $2\beta\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2} = \alpha$, τότε να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.
64. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $(\beta-\gamma)^2 + 4\beta\gamma\eta\mu^2\frac{\mathrm{A}}{2} = \alpha^2$.
65. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $2\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma = \frac{\mathrm{E}}{R^2}$.
66. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho}{4R}$.

67. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\frac{\tau}{4R}$.

68. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\rho}{\tau}$.

69. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sigma\phi\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\phi\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\phi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\mathrm{E}}{\rho^2}$.

70. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sqrt{\rho R_\alpha R_\beta R_\gamma}=\mathrm{E}$.

71. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-4\mathrm{E}\sigma\phi\mathrm{A}$.

72. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{1}{R_\alpha}+\frac{1}{R_\beta}+\frac{1}{R_\gamma}=\frac{1}{\rho}$.

73. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{1}{2R\rho}$.

74. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $R_\alpha R_\beta+R_\beta R_\gamma+R_\gamma R_\alpha=\tau^2$.

75. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{\rho}$.

76. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sigma\phi\frac{\mathrm{A}}{2}+\sigma\phi\frac{\mathrm{B}}{2}+\sigma\phi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\tau}{\rho}$.

77. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $R_\alpha+R_\beta+R_\gamma=4R+\rho$.

78. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}+\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}+\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}=\frac{4R+\rho}{\tau}$.

79. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{R_\alpha^2}+\frac{1}{R_\beta^2}+\frac{1}{R_\gamma^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\mathrm{E}^2}.$$

80. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$2\mathrm{E}=\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma}.$$

81. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\alpha\sigma\upsilon\nu^2\frac{\mathrm{B}}{2}+\beta\sigma\upsilon\nu^2\frac{\mathrm{A}}{2}=\tau$.

82. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\alpha\eta\mu^2\frac{\mathrm{B}}{2}+\beta\eta\mu^2\frac{\mathrm{A}}{2}=\tau-\gamma$.

83. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$.

84. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$.

85. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$.

86. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\upsilon_\alpha\upsilon_\beta+\upsilon_\beta\upsilon_\gamma+\upsilon_\gamma\upsilon_\alpha=\frac{2\rho\tau^2}{R}.$$

87. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$(\alpha-\beta)^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}+(\alpha+\beta)^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}=\gamma^2.$$
88. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$(\alpha-\beta)\sigma\phi\frac{\Gamma}{2}+(\beta-\gamma)\sigma\phi\frac{A}{2}+(\gamma-\alpha)\sigma\phi\frac{B}{2}=0.$$
89. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$(\beta+\gamma-\alpha)(\sigma\phi\frac{B}{2}+\sigma\phi\frac{\Gamma}{2})=2\alpha\sigma\phi\frac{A}{2}.$$
90. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=\frac{2(\alpha+\beta)}{\gamma}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}.$$
91. Αν σ' ένα τρίγωνο αληθεύη η σχέση $\beta^3+\gamma^3-\alpha^3=2(\tau-\alpha)\alpha^2$, τότε η γωνία Α του τριγώνου είναι ίση με 60^o.
92. Αν σ' ένα τρίγωνο αληθεύη η σχέση $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2\tau\alpha^2$, τότε η γωνία Α του τριγώνου είναι ίση με 60^o.
93. Αν σ'ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση Ε = τ(τ-α), τότε το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.
94. Αν σ' ένα τρίγωνο οι όροι $\sigma\phi\frac{A}{2},\sigma\phi\frac{B}{2}$ και $\sigma\phi\frac{\Gamma}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, τότε να αποδειχθεί ότι και οι πλευρές α, β και γ του τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.
95. Αν ισχύει $0^o < x < 45^o$, να αποδειχθεί ότι ημx < συνx.
96. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi+\alpha)-\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=0.$$
97. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\sigma\phi\alpha+\varepsilon\phi(\pi+\alpha)+\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\varepsilon\phi(2\pi-\alpha)=0.$$
98. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sigma\upsilon\nu(\pi+\alpha)=0.$$
99. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\eta\mu\left(a+\frac{3\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$.

100. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}=\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta$.

101. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}=\sigma\phi\beta-\sigma\phi\alpha$.

102. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi\alpha}$.

103. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\varepsilon\phi\alpha}{1+\varepsilon\phi\alpha}$.

104. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha.$$

105. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\beta.$$

106. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\varepsilon\phi\mathrm{A}+\varepsilon\phi\mathrm{B}+\varepsilon\phi\Gamma=\varepsilon\phi\mathrm{A}\,\varepsilon\phi\mathrm{B}\,\varepsilon\phi\Gamma.$$

107. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\sigma\phi\mathrm{A}\,\sigma\phi\mathrm{B}+\sigma\phi\mathrm{B}\,\sigma\phi\Gamma+\sigma\phi\Gamma\,\sigma\phi\mathrm{A}=1.$$

108. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}+\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}=1.$$

109. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\sigma\phi\frac{\mathrm{A}}{2}+\sigma\phi\frac{\mathrm{B}}{2}+\sigma\phi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\phi\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\phi\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\phi\frac{\Gamma}{2}.$$

110. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}-\omega\right)=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega}.$$

111. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}.$$

112. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)=\frac{1+\varepsilon\phi\omega}{1-\varepsilon\phi\omega}.$$

113. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}-\omega\right)=\frac{1-\varepsilon\phi\omega}{1+\varepsilon\phi\omega}.$$

114. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}+\frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}+\frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha}=0.$$

115. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta=\frac{2\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}.$$

116. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\sigma\phi\beta-\sigma\phi\alpha=\frac{2\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}.$$

117. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\sigma\phi\alpha-\varepsilon\phi\beta=\frac{2\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)}.$$

118. Να αποδειχθεί ότι το παρακάτω κλάσμα είναι ανεξάρτητο του x
$$\frac{\eta\mu(\alpha+x)-\eta\mu(\alpha-x)}{\sigma\upsilon\nu((\beta-x)-\sigma\upsilon\nu(\beta+x)}.$$
119. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\eta\mu\alpha\eta\mu(\beta-\gamma)+\eta\mu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)+\eta\mu\gamma\eta\mu(\alpha-\beta)=0.$$
120. Αν ισχύει $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, να αποδειχθεί ότι $(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\beta)=2$.

121. Αν σ' ένα τρίγωνο είναι Α=45°, να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$(1+\sigma\varphi\mathrm{B})(1+\sigma\varphi\Gamma)=2$$
122. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του α
$$\eta\mu\alpha+\eta\mu\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\eta\mu\alpha\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$$
123. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του α
$$\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\alpha\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$$
124. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του α
$$\eta\mu\alpha+\eta\mu\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\eta\mu\alpha\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$$
125. Αν τα α και β είναι μικρότερα των 90°, να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$\eta\mu(\alpha+\beta)<\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta$$
126. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του α
$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right).$$
127. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+x)-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)=\eta\mu^2\alpha.$$
128. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\eta\mu^2x+\eta\mu^2(\alpha+x)-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(\alpha+x)=\eta\mu^2\alpha.$$
129. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα
$$\frac{\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}}{\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}{\eta\mu\Gamma\,\eta\mu\mathrm{A}}+\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}}=2.$$
130. Αν το ω είναι τυχαία γωνία, να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα
$$\alpha\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\omega)+\beta\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}+\omega)=\gamma\sigma\upsilon\nu\omega.$$
131. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα
$$\varepsilon\varphi\mathrm{B}=\frac{\beta\eta\mu\mathrm{A}}{\gamma-\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}}.$$
132. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα
$$\alpha\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)+\beta\eta\mu(\Gamma-\mathrm{A})+\gamma\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})=0.$$
133. Αν οι πλευρές α, β και γ ενός τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{3}$.

134. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\frac{\varepsilon\varphi \mathrm{B}}{\varepsilon\varphi \Gamma}=\frac{\eta\mu^2 \mathrm{B}}{\eta\mu^2 \Gamma}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

135. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\varepsilon\varphi \mathrm{B}=\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\eta\mu \mathrm{A}-\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

136. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\frac{\eta\mu \mathrm{A}}{\eta\mu \mathrm{B}}=2\sigma\upsilon\nu\Gamma$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

137. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\frac{\alpha-2\gamma\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}}{\gamma\eta\mu \mathrm{B}}+\frac{\beta-2\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha\eta\mu\Gamma}+\frac{\gamma-2\beta\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}}{\beta\eta\mu \mathrm{A}}=0.$$

138. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{\eta\mu 2\phi}{1+\sigma\upsilon\nu 2\phi}.\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{1+\sigma\upsilon\nu\phi}=\varepsilon\phi\frac{\phi}{2}$.

139. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\varepsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)=\frac{1-\eta\mu 2\phi}{1+\eta\mu 2\phi}$.

140. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\beta^2\eta\mu 2\Gamma+\gamma^2\eta\mu 2\mathrm{B}=2\beta\gamma\eta\mu \mathrm{A}.$$

141. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$4\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu 3\alpha.$$

142. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\varepsilon\phi\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=-\varepsilon\phi 3\alpha.$$

143. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $3-4\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 4x=8\eta\mu^4 x$.

144. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(\varepsilon\phi 2\alpha-\varepsilon\phi\alpha)(\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)=2\eta\mu\alpha.$$

145. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\eta\mu 3\alpha\eta\mu^3\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha\sigma\upsilon\nu^3\alpha=\sigma\upsilon\nu^3 2\alpha.$$

146. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$4\sigma\upsilon\nu 3\alpha\eta\mu^3\alpha+4\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu^3\alpha=3\eta\mu 4\alpha.$$

147. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\varepsilon\phi\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=3\varepsilon\phi 3\alpha.$$

148. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{\varepsilon\phi^2 2\alpha-\varepsilon\phi^2\alpha}{1-\varepsilon\phi^2 2\alpha\varepsilon\phi^2\alpha}=\varepsilon\phi 3\alpha\varepsilon\phi\alpha$.

149. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{(1-\alpha^2)\eta\mu 2x-2\alpha\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu x-\alpha\sigma\upsilon\nu x}$.

150. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\eta\mu 5\alpha=5\eta\mu\alpha-20\eta\mu^3\alpha+16\eta\mu^5\alpha$.

151. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\sigma\upsilon\nu 5\alpha = 16\sigma\upsilon\nu^5\alpha - 20\sigma\upsilon\nu^3\alpha + 5\sigma\upsilon\nu\alpha .$$
152. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\dfrac{1-\varepsilon\phi^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\varepsilon\phi^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \eta\mu 2\alpha$.
153. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha$.
154. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $1+\eta\mu 2\alpha$.
155. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha$.
156. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha$.
157. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\sigma\upsilon\nu 4\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha$.
158. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha + 2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha$.
159. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα
$$\eta\mu\mathrm{A} + \eta\mu\mathrm{B} + \eta\mu\mathrm{A} = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} .$$
160. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta - 1$.
161. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα
$$\eta\mu^2\mathrm{A} + \eta\mu^2\mathrm{B} - \eta\mu^2\Gamma = 2\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma .$$
162. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$.
163. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\beta$.
164. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha$.
165. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta$.
166. Να γίνει πηλίκο η παρακάτω παράσταση $1+\varepsilon\phi\alpha$.
167. Να γίνει πηλίκο η παρακάτω παράσταση $1+\sigma\phi\alpha$.
168. Να γίνει πηλίκο η παρακάτω παράσταση $1+\varepsilon\phi^2\alpha$.
169. Να γίνει πηλίκο η παρακάτω παράσταση $\varepsilon\phi^2\alpha - \varepsilon\phi^2\beta$.
170. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 2\alpha - \eta\mu\alpha$.
171. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha$.
172. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 7\alpha$.
173. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $1+\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha$.
174. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$(\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\phi)^2 + (\eta\mu\omega + \eta\mu\phi)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega-\phi}{2}\right).$$
175. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$(\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\phi)^2 + (\eta\mu\omega - \eta\mu\phi)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega+\phi}{2}\right).$$
176. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$(\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu\phi)^2 + (\eta\mu\omega - \eta\mu\phi)^2 = 4\eta\mu^2\left(\frac{\omega-\phi}{2}\right).$$
177. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$(\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu\phi)^2 + (\eta\mu\omega + \eta\mu\phi)^2 = 4\eta\mu^2\left(\frac{\omega+\phi}{2}\right).$$

178. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση
$$\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma-\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma).$$
179. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση
$$\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma).$$
180. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση
$$\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\beta-\gamma)+\eta\mu(\gamma-\alpha).$$
181. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu\mathrm{B}-\eta\mu\Gamma=4\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$
182. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\sigma\upsilon\nu\Gamma-1=4\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}.$$
183. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\eta\mu2\mathrm{A}+\eta\mu2\mathrm{B}+\eta\mu2\Gamma=4\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma.$$
184. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\eta\mu4\mathrm{A}+\eta\mu4\mathrm{B}+\eta\mu4\Gamma=-4\eta\mu2\mathrm{A}\,\eta\mu2\mathrm{B}\,\eta\mu2\Gamma.$$
185. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2(\alpha-\beta)$.

186. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση
$$\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha-\beta)-1.$$
187. Να γίνει γινόμενο (τέλειο τετράγωνο) η παρακάτω παράσταση
$$1+\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha.$$
188. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{A}+\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{B}+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma=1-2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$
189. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\eta\mu^2\frac{\mathrm{A}}{2}+\eta\mu^2\frac{\mathrm{B}}{2}+\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}=1-2\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}.$$
190. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}+\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}+\eta\mu\frac{\Gamma}{2}-1=4\eta\mu\frac{\pi-\mathrm{A}}{4}\eta\mu\frac{\pi-\mathrm{B}}{4}\eta\mu\frac{\pi-\Gamma}{4}.$$
191. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+\mathrm{A}}{4}\eta\mu\frac{\pi+\mathrm{B}}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi-\Gamma}{4}.$$
192. Να απλοποιηθεί το παρακάτω κλάσμα $\dfrac{\eta\mu8\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu6\alpha\sigma\upsilon\nu3\alpha}{\sigma\upsilon\nu2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu3\alpha\eta\mu4\alpha}$.

193. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=-\sigma\upsilon\nu2\alpha.$$
194. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(\gamma-\alpha)-\eta\mu\alpha\eta\mu(\gamma-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\gamma.$$
195. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\eta\mu^2(\alpha-\beta)+\eta\mu^2\beta+2\eta\mu(\alpha-\beta)\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu^2\alpha.$$
196. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\eta\mu\alpha\eta\mu(\beta-\gamma)+\eta\mu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)+\eta\mu\gamma\eta\mu(\alpha-\beta)=0.$$
197. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(\beta-\gamma)+\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)+\sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu(\alpha-\beta)=0.$$

198. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\frac{\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\beta}=\varepsilon\varphi(\alpha+\beta).$$
199. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\frac{\eta\mu 7\alpha}{\eta\mu\alpha}-2\sigma\upsilon\nu 2\alpha-2\sigma\upsilon\nu 4\alpha-2\sigma\upsilon\nu 6\alpha=1.$$
200. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma).$$
201. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)}$.

202. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\alpha(\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\sigma\upsilon\nu\Gamma)=2(\beta+\gamma)\eta\mu^2\frac{\mathrm{A}}{2}.$$
203. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\alpha(\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}-\sigma\upsilon\nu\Gamma)=2(\gamma-\beta)\sigma\upsilon\nu^2\frac{\mathrm{A}}{2}.$$
204. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=4R\,\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma.$$
205. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$(\beta^2-\gamma^2)\sigma\varphi\mathrm{A}+(\gamma^2-\alpha^2)\sigma\varphi\mathrm{B}+(\alpha^2-\beta^2)\sigma\varphi\Gamma=0.$$
206. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει ημΓ = συνΑ + συνΒ, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

207. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu\mathrm{A}=\frac{\eta\mu\mathrm{B}+\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\sigma\upsilon\nu\Gamma}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

208. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\varepsilon\varphi\mathrm{B}=\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\eta\mu\mathrm{A}-\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

209. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\frac{\eta\mu\mathrm{A}}{\eta\mu\mathrm{B}}=2\sigma\upsilon\nu\Gamma$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

210. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\sigma\upsilon\nu\Gamma=1+\frac{\rho}{R}$.

211. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{2\mathrm{E}}{R}.$$
212. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu\mathrm{B}+\eta\mu\Gamma=\frac{\mathrm{E}}{R\rho}$.

213. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\alpha\sigma\varphi\mathrm{A}+\beta\sigma\varphi\mathrm{B}+\gamma\sigma\varphi\Gamma=2(R+\rho).$$
214. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\eta\mu\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}=\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma.$$

215. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}\,\eta\mu \mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu \mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma\,\eta\mu \mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu\Gamma\,\eta\mu \mathrm{A}\,\eta\mu \mathrm{B} = 1 + \sigma\upsilon\nu \mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

216. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$\varepsilon\phi k\mathrm{A} + \varepsilon\phi k\mathrm{B} + \varepsilon\phi k\Gamma = \varepsilon\phi k\mathrm{A}\,\varepsilon\phi k\mathrm{B}\,\varepsilon\phi k\Gamma$, όπου k ακέραιος.

217. Να βρεθεί το ανάπτυγμα του $\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)$.

218. Να βρεθεί το ανάπτυγμα του $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)$.

219. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\rho^2 + \tau^2 + 4R\rho = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

220. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\left(\tau^2 - \rho^2 - 4R\rho\right).$$

221. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2\left(1 + \sigma\upsilon\nu \mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma\right).$$

222. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\eta\mu^3 \mathrm{A} + \eta\mu^3 \mathrm{B} + \eta\mu^3\Gamma = 3\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\Gamma}{2}.$$

223. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\sigma\upsilon\nu^3 \mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu^3 \mathrm{B} + \sigma\upsilon\nu^3\Gamma - 1 = 3\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} - \eta\mu\frac{3\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{3\mathrm{B}}{2}\eta\mu\frac{3\Gamma}{2}.$$

224. Αν $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, τότε να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
$$\frac{\eta\mu(\alpha+x) - \eta\mu(\alpha-x)}{\sigma\upsilon\nu(\beta-x) - \sigma\upsilon\nu(\beta+x)} = 1.$$

225. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\alpha\eta\mu\left(\frac{\mathrm{A}}{2} + \Gamma\right) = (\beta+\gamma)\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}$.

226. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\frac{\alpha^2\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\eta\mu \mathrm{B} + \eta\mu\Gamma} + \frac{\beta^2\eta\mu(\Gamma-\mathrm{A})}{\eta\mu\Gamma + \eta\mu \mathrm{A}} + \frac{\gamma^2\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\eta\mu \mathrm{A} + \eta\mu \mathrm{B}} = 0.$$

227. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\frac{\alpha\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\beta^2 - \gamma^2} = \frac{\beta\eta\mu(\Gamma-\mathrm{A})}{\gamma^2 - \alpha^2} = \frac{\gamma\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

228. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\alpha\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2} + \beta\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma-\mathrm{A}}{2} + \gamma\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} = 0.$$

229. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\frac{\sigma\upsilon\nu \mathrm{B} - \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\tau-\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma - \sigma\upsilon\nu \mathrm{A}}{\tau-\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} - \sigma\upsilon\nu \mathrm{B}}{\tau-\gamma} = 0.$$

230. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2}\eta\mu 2\mathrm{A} + \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\beta^2}\eta\mu 2\mathrm{B} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}\eta\mu 2\Gamma = 0.$$

231. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
$$\alpha^3\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma) + \beta^3\sigma\upsilon\nu(\Gamma-\mathrm{A}) + \gamma^3\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = 3\alpha\beta\gamma.$$

232. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu^2 \mathrm{A} + \eta\mu^2 \mathrm{B} + \eta\mu^2 \Gamma = 2$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

233. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

234. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha^2\left(\sigma\upsilon\nu^2 \mathrm{B} - \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma\right) + \beta^2\left(\sigma\upsilon\nu^2 \Gamma - \sigma\upsilon\nu^2 \mathrm{A}\right) + \gamma^2\left(\sigma\upsilon\nu^2 \mathrm{A} - \sigma\upsilon\nu^2 \mathrm{B}\right) = 0 .$$

235. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\sigma\phi^2 \mathrm{A} + \sigma\phi^2 \mathrm{B} + \sigma\phi^2 \Gamma \geq 1$.

236. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\varepsilon\phi^2 \dfrac{\mathrm{A}}{2} + \varepsilon\phi^2 \dfrac{\mathrm{B}}{2} + \varepsilon\phi^2 \dfrac{\Gamma}{2} \geq 1$.

237. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$2\eta\mu^2 \beta + 4\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\eta\mu\alpha\eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu 2(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha .$$

238. Αν είναι α+β+γ+δ=kπ, όπου k ακέραιος τότε να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\eta\mu(\alpha + \delta)\eta\mu(\gamma + \delta) = \eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\gamma + \beta).$$

239. Αν είναι α+β+γ+δ=kπ, όπου k ακέραιος τότε να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \delta)\sigma\upsilon\nu(\gamma + \delta) = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma + \beta).$$

240. Να αποδειχθεί η παρακάτω ταυτότητα

$$\frac{\eta\mu\alpha + \lambda\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \lambda\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha} = \varepsilon\phi 3\alpha .$$

241. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\frac{\varepsilon\phi \mathrm{A} + \varepsilon\phi \mathrm{B}}{\eta\mu 2\Gamma} = \frac{\varepsilon\phi \mathrm{B} + \varepsilon\phi \Gamma}{\eta\mu 2\mathrm{A}} = \frac{\varepsilon\phi \Gamma + \varepsilon\phi \mathrm{A}}{\eta\mu 2\mathrm{B}} .$$

242. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\eta\mu^3 \mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\left(\mathrm{B} - \Gamma\right) + \eta\mu^3 \mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\left(\Gamma - \mathrm{A}\right) + \eta\mu^3 \Gamma\sigma\upsilon\nu\left(\mathrm{A} - \mathrm{B}\right) = 3\eta\mu \mathrm{A}\,\eta\mu \mathrm{B}\,\eta\mu \Gamma .$$

243. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\eta\mu^4 \mathrm{A} + \eta\mu^4 \mathrm{B} + \eta\mu^4 \Gamma = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu 2\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma + 2\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu \Gamma + \frac{3}{2} .$$

244. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu^4 \mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu^4 \mathrm{B} + \sigma\upsilon\nu^4 \Gamma = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu 2\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu 2\Gamma - 2\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}\sigma\upsilon\nu \Gamma + \frac{1}{2}$$

245. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$\sigma\phi\lambda \mathrm{A}\,\sigma\phi\lambda \mathrm{B} + \sigma\phi\lambda \mathrm{B}\,\sigma\phi\lambda \Gamma + \sigma\phi\lambda \Gamma\,\sigma\phi\lambda \mathrm{A} = 1$, όπου λ ακέραιος.

246. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu 4\mathrm{A} + \eta\mu 4\mathrm{B} + \eta\mu 4\Gamma = 0$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

247. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu 3\mathrm{A} + \eta\mu 3\mathrm{B} + \eta\mu 3\Gamma = 0$, να αποδειχθεί ότι μία τουλάχιστον γωνία του τριγώνου είναι ίση με 60^o.

248. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\sigma\upsilon\nu 3\mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu 3\mathrm{B} + \sigma\upsilon\nu 3\Gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι μία τουλάχιστον γωνία του τριγώνου είναι ίση με 120^o.

249. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 2\tau\alpha^2$ και $\eta\mu \mathrm{B}\,\eta\mu \Gamma = \eta\mu^2 \mathrm{A}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

250. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4(\sigma\phi \mathrm{A} + \sigma\phi \mathrm{B} + \sigma\phi \Gamma)} = \mathrm{E}$.

251. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2\frac{\mathrm{A}}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\mathrm{B}}{2}-\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=1$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

252. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}+\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}+\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}=2$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

253. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\varepsilon\phi\mathrm{B}+\varepsilon\phi\Gamma=\frac{\alpha^2}{2\mathrm{E}}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.