

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Είναι γνωστό από τη Γεωμετρία ότι το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου είναι ίσο με $2\pi\rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου. Ορίζουμε ως **α-κτίνιο (rad)** ένα τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου του και μπορούμε να βρούμε ότι η γωνία του τόξου αυτού είναι ίση με $360/2\pi$ ή $57,3^\circ$.

Ανάμεσα στις μοίρες και τα ακτίνια ισχύουν τα εξής :

$$\frac{\mu}{360} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Όπου μ είναι οι μοίρες μιας γωνίας και α η τιμή της ίδιας γωνίας σε ακτίνια.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Ορισμοί

Ημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της απέναντι καθέτου πλευράς προς την υποτείνουσα και συμβολίζεται με τα γράμματα $\eta\mu$.

Συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της προσκείμενης καθέτου πλευράς προς την υποτείνουσα και συμβολίζεται με τα γράμματα $\sigma\upsilon\nu$.

Το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας λαμβάνουν τιμές από -1 έως +1 (κλειστό διάστημα).

Ισχύουν τα εξής :

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1, \eta\mu\omega = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}, \sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \eta\mu^2\omega},$$

Εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της απέναντι καθέτου πλευράς προς την προσκείμενη κάθετο πλευρά και συμβολίζεται με τα γράμματα $\epsilon\varphi$.

Συνεφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της προσκείμενης καθέτου πλευράς προς την απέναντι κάθετο πλευρά και συμβολίζεται με τα γράμματα $\sigma\varphi$.

Η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη μιας γωνίας είναι αριθμοί αντίστροφοι.

Ισχύουν τα εξής :

$$\varepsilon\varphi\omega = 1, \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

Τριγωνομετρικός κύκλος λέγεται ο κύκλος του οποίου η ακτίνα λαμβάνεται ως μονάδα και επί του οποίου έχει ορισθεί η αρχή και η θετική φορά των αξόνων. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των συνημιτόνων και ο κάθετος άξονας είναι ο άξονας των ημιτόνων.

Ημίτονο ενός τόξου λέγεται το μήκος της προβολής της τελικής ακτίνας στον άξονα των ημιτόνων και συνημίτονο ενός τόξου λέγεται το μήκος της προβολής της τελικής ακτίνας στον άξονα των συνημιτόνων.

$$\begin{aligned} &\text{Αν είναι } \eta\mu x = \eta\mu\alpha, \text{ τότε :} \\ &x = 2k\pi + \alpha \text{ ή } x = (2k+1)\pi - \alpha, \\ &\text{όπου } k \text{ ακέραιος} \\ &\text{Ισχύει :} \\ &-1 \leq \eta\mu x \leq +1 \text{ ή } |\eta\mu x| \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Αν είναι } \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha, \text{ τότε :} \\ &x = 2k\pi \pm \alpha, \text{ όπου } k \text{ ακέραιος} \\ &\text{Ισχύει :} \\ &-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq +1 \text{ ή } |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Αν είναι } \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\alpha, \text{ τότε :} \\ &x = k\pi + \alpha, \text{ όπου } k \text{ ακέραιος} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Αν είναι } \sigma\varphi x = \sigma\varphi\alpha, \text{ τότε :} \\ &x = k\pi + \alpha, \text{ όπου } k \text{ ακέραιος} \end{aligned}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΗΜΩΝ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τεταρτημόριο	1°	2°	3°	4°
ημίτονο	+	+	-	-
συνημίτονο	+	-	-	+
εφαπτομένη	+	-	+	-
συνεφαπτομένη	+	-	+	-

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τόξο	0°	0-90°	90°	90°-180°	180°	180°-270°	270°	270°-360°	360°
ημίτονο	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
συνημίτονο	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
εφαπτομένη	0	↗	+∞/ -∞	↗	0	↗	+∞/ -∞	↗	0
συνεφαπτομένη	-∞	↘	0	↘	+∞/ -∞	↘	0	↘	+∞/ -∞

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 45°, 30° και 60°

Ισχύουν τα εξής :

$$\begin{aligned} \eta\mu 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \epsilon\phi 45^\circ = 1, \sigma\phi 45^\circ = 1 \\ \eta\mu 30^\circ &= \frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma\phi 30^\circ = \sqrt{3} \\ \eta\mu 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}, \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}, \sigma\phi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η κάθε κάθετος πλευρά είναι ίση με την υποτεινούσα επί το ημίτονο της απέναντι γωνίας ή επί το συνημίτονο της προσκείμενης γωνίας.

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha\eta\mu\beta, \beta = \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma \\ \gamma &= \alpha\eta\mu\Gamma, \gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu\beta \end{aligned}$$

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η κάθε κάθετος πλευρά είναι ίση με την άλλη κάθετο πλευρά επί την εφαπτομένη της απέναντι γωνίας ή επί τη συνεφαπτομένη της προσκείμενης γωνίας.

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma\epsilon\phi\beta, \beta = \gamma\sigma\phi\Gamma \\ \gamma &= \beta\epsilon\phi\Gamma, \gamma = \beta\sigma\phi\beta \end{aligned}$$

Στις συμπληρωματικές γωνίες, το ημίτονο της μιας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας είναι ίση με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

$$\begin{aligned} \eta\mu B &= \sigma\upsilon\nu\Gamma, \eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu B \\ \epsilon\phi B &= \sigma\phi\Gamma, \epsilon\phi\Gamma = \sigma\phi B \\ &\text{ή} \\ \eta\mu(90^\circ - \omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega, \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega \\ \epsilon\phi(90^\circ - \omega) &= \sigma\phi\omega, \sigma\phi(90^\circ - \omega) = \epsilon\phi\omega \end{aligned}$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ισχύουν τα εξής :

$$\begin{aligned} \eta\mu\omega &= \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}, \sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \eta\mu^2\omega} \\ \eta\mu^2\omega &= \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}, \eta\mu\omega = \frac{\epsilon\phi\omega}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}} \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega &= \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}, \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}} \\ \eta\mu^2\omega &= \frac{1}{1 + \sigma\phi^2\omega}, \eta\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma\phi^2\omega}} \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega &= \frac{\sigma\phi^2\omega}{1 + \sigma\phi^2\omega}, \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sigma\phi\omega}{\sqrt{1 + \sigma\phi^2\omega}} \end{aligned}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Ισχύουν τα εξής :

$$\begin{aligned} \eta\mu 2\omega &= 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu 2\omega &= \sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega \\ \sigma\upsilon\nu 2\omega &= 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1 \\ \sigma\upsilon\nu 2\omega &= 1 - 2\eta\mu^2\omega \\ \epsilon\phi 2\omega &= \frac{2\epsilon\phi\omega}{1 - \epsilon\phi^2\omega} \\ \sigma\phi 2\omega &= \frac{\sigma\phi^2\omega - 1}{2\sigma\phi\omega} \end{aligned}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\begin{aligned}\eta\mu(\pi - \omega) &= \eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\varphi(\pi - \omega) &= -\epsilon\varphi\omega \\ \sigma\varphi(\pi - \omega) &= -\sigma\varphi\omega\end{aligned}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Θεώρημα των Ημιτόνων

Η κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι ανάλογη προς το ημίτονο της απέναντι γωνίας και ο λόγος αυτός είναι ίσος με την διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\eta\mu A} &= \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R \\ \alpha &= 2R\eta\mu A \\ \beta &= 2R\eta\mu B \\ \gamma &= 2R\eta\mu \Gamma\end{aligned}$$

Θεώρημα των Συνημιτόνων

Το τετράγωνο της μιας πλευράς ενός τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών μείον το γινόμενο των άλλων δύο πλευρών επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας.

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \\ \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma \\ \sigma\upsilon\nu A &= \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu B &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu \Gamma &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}\end{aligned}$$

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Αν συμβολίσουμε με τ την ημιπερίμετρο ενός τριγώνου, δηλαδή $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, τότε ισχύουν τα εξής:

$$\eta\mu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta\gamma}}, \quad \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}}$$

$$\eta\mu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau - \alpha)(\tau - \gamma)}{\alpha\gamma}}, \quad \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau - \beta)}{\alpha\gamma}}$$

$$\eta\mu \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}{\alpha\beta}}, \quad \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau - \gamma)}{\alpha\beta}}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ισχύουν τα εξής:

$$E = \frac{1}{2} \alpha\beta\eta\mu\Gamma, \quad E = \frac{1}{2} \alpha\gamma\eta\mu B$$

$$E = \frac{1}{2} \beta\gamma\eta\mu\alpha, \quad E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

(Τύπος του Ήρωνος)

$$E = \tau\rho$$

όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου
στο τρίγωνο κύκλου

$$\rho = \sqrt{\frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\tau}}$$

$$E = (\tau - \alpha)R_\alpha, \quad E = (\tau - \beta)R_\beta, \quad E = (\tau - \gamma)R_\gamma$$

όπου R_α , R_β και R_γ είναι οι ακτίνες
των παρεγγεγραμμένων στο τρίγωνο κύκλων

ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν τα εξής:

$$\rho = (\tau - \alpha)\varepsilon\phi\frac{A}{2}, \rho = (\tau - \beta)\varepsilon\phi\frac{B}{2}, \rho = (\tau - \gamma)\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}$$

$$\sigma\phi\frac{A}{2} = \frac{\tau - \alpha}{\rho}, \sigma\phi\frac{B}{2} = \frac{\tau - \beta}{\rho}, \sigma\phi\frac{\Gamma}{2} = \frac{\tau - \gamma}{\rho}$$

$$R_\alpha = \tau.\varepsilon\phi\frac{A}{2}, R_\beta = \tau.\varepsilon\phi\frac{B}{2}, R_\gamma = \tau.\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}$$

Ύψη Τριγώνου :

$$v_\alpha = \beta\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu B = \frac{2E}{\alpha}$$

$$v_\beta = \alpha\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu A = \frac{2E}{\beta}$$

$$v_\gamma = \beta\eta\mu A = \alpha\eta\mu B = \frac{2E}{\gamma}$$

Διχοτόμοι Τριγώνου :

$$\delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta + \gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}, \delta_\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}, \delta_\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

Εξωτερικές Διχοτόμοι Τριγώνου :

$$\Delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{|\gamma - \beta|}\eta\mu\frac{A}{2}, \Delta_\beta = \frac{2\alpha\gamma}{|\alpha - \gamma|}\eta\mu\frac{B}{2}, \Delta_\gamma = \frac{2\alpha\beta}{|\alpha - \beta|}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

Διάμεσοι Τριγώνου :

$$4\mu_\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$4\mu_\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$$

$$4\mu_\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

$$\varepsilon\phi A + \varepsilon\phi B + \varepsilon\phi\Gamma = \varepsilon\phi A\varepsilon\phi B\varepsilon\phi\Gamma$$

$$\sigma\phi A\sigma\phi B + \sigma\phi B\sigma\phi\Gamma + \sigma\phi\Gamma\sigma\phi A = 1$$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ MOLLWEIDE

Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν τα εξής:

$$\eta\mu \frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{\alpha} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha} \eta\mu \frac{A}{2}$$

$$\epsilon\phi \frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma} \sigma\phi \frac{A}{2}$$

Θεώρημα των Εφαπτομένων

$$\frac{\epsilon\phi \frac{B-\Gamma}{2}}{\epsilon\phi \frac{B+\Gamma}{2}} = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}$$

Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε ισχύει $\eta\mu x < x < \epsilon\phi x$, όπου x σε ακτίνια.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ $\alpha+\beta+\gamma$

Ισχύουν τα εξής :

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) = \\ \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \\ \eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma) = \\ \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma - \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha - \\ \eta\mu\gamma\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \end{aligned}$$

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\gamma - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta\epsilon\phi\gamma}{1 - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\beta\epsilon\phi\gamma - \epsilon\phi\gamma\epsilon\phi\alpha}$$

$$\sigma\phi(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma - \sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta - \sigma\phi\gamma}{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + \sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma + \sigma\phi\gamma\sigma\phi\alpha - 1}$$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΟΞΟΥ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} \eta\mu(2k\pi + \alpha) &= \eta\mu\alpha, \sigma\upsilon\nu(2k\pi + \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha, \\ \epsilon\phi(2k\pi + \alpha) &= \epsilon\phi\alpha, \sigma\phi(2k\pi + \alpha) = \sigma\phi\alpha \\ &\text{όπου } k \text{ ακέραιος} \end{aligned}$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\alpha$$

$$\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\phi\alpha, \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \epsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu(\pi - \alpha) = \eta\mu\alpha, \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\epsilon\phi(\pi - \alpha) = -\epsilon\phi\alpha, \sigma\phi(\pi - \alpha) = -\sigma\phi\alpha$$

$$\eta\mu(-\alpha) = -\eta\mu\alpha, \sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\epsilon\phi(-\alpha) = -\epsilon\phi\alpha, \sigma\phi(-\alpha) = -\sigma\phi\alpha$$

$$\eta\mu(\pi + \alpha) = -\eta\mu\alpha, \sigma\upsilon\nu(\pi + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\epsilon\phi(\pi + \alpha) = \epsilon\phi\alpha, \sigma\phi(\pi + \alpha) = \sigma\phi\alpha$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\eta\mu\alpha$$

$$\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sigma\phi\alpha, \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\epsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \eta\mu\alpha$$

$$\epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\sigma\phi\alpha, \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\epsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\eta\mu\alpha$$

$$\epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\phi\alpha, \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \epsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu(2\pi - \alpha) = -\eta\mu\alpha, \sigma\upsilon\nu(2\pi - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\epsilon\phi(2\pi - \alpha) = -\epsilon\phi\alpha, \sigma\phi(2\pi - \alpha) = -\sigma\phi\alpha$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΞΩΝ

Ισχύουν τα εξής:

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\varepsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}$$

$$\varepsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta}{1 + \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}$$

$$\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}$$

$$\sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ 2α

Ισχύουν τα εξής:

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha, \eta\mu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha, \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1, \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - 1, \sigma\upsilon\nu\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\phi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\phi\alpha}{1 - \varepsilon\phi^2\alpha}, \sigma\phi 2\alpha = \frac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha}$$

$$\varepsilon\phi\alpha = \frac{2\varepsilon\phi\frac{\alpha}{2}}{1 - \varepsilon\phi^2\frac{\alpha}{2}}, \sigma\phi\alpha = \frac{\sigma\phi^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\sigma\phi\frac{\alpha}{2}}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ 3α

Ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}\eta\mu 3\alpha &= 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha \\ \sigma\upsilon\nu 3\alpha &= 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \varepsilon\phi 3\alpha &= \frac{3\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi^3\alpha}{1 - 3\varepsilon\phi^2\alpha} \\ \sigma\phi 3\alpha &= \frac{\sigma\phi^3\alpha - 3\sigma\phi\alpha}{3\sigma\phi^2\alpha - 1}\end{aligned}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ α ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ σ\upsilon\nu 2α

Ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}\eta\mu^2\alpha &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \\ \varepsilon\phi^2\alpha &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}\end{aligned}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ α ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ $\varepsilon\phi \frac{\alpha}{2}$

Ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}\eta\mu\alpha &= \frac{2\varepsilon\phi \frac{\alpha}{2}}{1 + \varepsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1 - \varepsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \varepsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \varepsilon\phi\alpha &= \frac{2\varepsilon\phi \frac{\alpha}{2}}{1 - \varepsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Ισχύουν τα εξής:

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{B-A}{2}$$

$$\varepsilon\phi A + \varepsilon\phi B = \frac{\eta\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B}$$

$$\varepsilon\phi A - \varepsilon\phi B = \frac{\eta\mu(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B}$$

$$\sigma\phi A + \sigma\phi B = \frac{\eta\mu(A+B)}{\eta\mu A \eta\mu B}$$

$$\sigma\phi A - \sigma\phi B = \frac{\eta\mu(B-A)}{\eta\mu A \eta\mu B}$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta &= \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) \\2\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha &= \eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta) \\2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \\2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ SIMPSON

Ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\mu+1)\alpha &= 2\eta\mu(\mu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu(\mu-1)\alpha \\ \sigma\upsilon\nu(\mu+1)\alpha &= 2\sigma\upsilon\nu(\mu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu(\mu-1)\alpha \\ \\ \eta\mu 4\alpha &= (4\eta\mu\alpha - 8\eta\mu^3\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu 4\alpha &= 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1 \\ \eta\mu 5\alpha &= 5\eta\mu\alpha - 20\eta\mu^3\alpha + 16\eta\mu^5\alpha \\ \sigma\upsilon\nu 5\alpha &= 16\sigma\upsilon\nu^5\alpha - 20\sigma\upsilon\nu^3\alpha + 5\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \eta\mu 6\alpha &= (6\eta\mu\alpha - 32\eta\mu^3\alpha + 32\eta\mu^5\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu 6\alpha &= 32\sigma\upsilon\nu^6\alpha - 48\sigma\upsilon\nu^4\alpha + 18\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\text{συν}^2\omega - \eta\mu^2\omega = 2\text{συν}^2\omega - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\omega$.
2. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{\eta\mu\omega}{\text{συν}\omega} + \frac{\text{συν}\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{1}{\eta\mu\omega\text{συν}\omega}$.
3. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\eta\mu^4\omega + \text{συν}^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega\text{συν}^2\omega$.
4. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{\eta\mu\omega}{1 + \text{συν}\omega} + \frac{1 + \text{συν}\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{2}{\eta\mu\omega}$.
5. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\epsilon\phi\omega + \sigma\phi\omega = \frac{1}{\eta\mu\omega\text{συν}\omega}$.
6. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $1 + \epsilon\phi^2\omega = \frac{1}{\text{συν}^2\omega}$.
7. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $1 + \sigma\phi^2\omega = \frac{1}{\eta\mu^2\omega}$.
8. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{\sigma\phi\omega - 1}{\sigma\phi\omega + 1} = \frac{1 - \epsilon\phi\omega}{1 + \epsilon\phi\omega}$.
9. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(\eta\mu\omega + \text{συν}\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \text{συν}\omega)^2 = 2$.
10. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(1 + \epsilon\phi\omega)(1 + \sigma\phi\omega)\eta\mu\omega\text{συν}\omega = (\eta\mu\omega + \text{συν}\omega)^2$.
11. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{\text{συν}\omega}{1 + \eta\mu\omega} + \frac{1 + \eta\mu\omega}{\text{συν}\omega} = \frac{2}{\text{συν}\omega}$.
12. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\eta\mu(90^\circ - \omega) + \epsilon\phi(90^\circ - \omega) = (1 + \eta\mu\omega)\sigma\phi\omega$.
13. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\eta\mu\frac{A+B}{2} = \text{συν}\frac{\Gamma}{2}$.
14. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\text{συν}^2\omega - \eta\mu^2\omega = \frac{1 - \epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$.
15. Αν ισχύει $\eta\mu\omega - \text{συν}\omega = \lambda$, να βρεθεί το $\eta\mu 2\omega$.
16. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(\eta\mu\omega + \text{συν}\omega)^2 = 1 + \eta\mu 2\omega$.
17. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(\eta\mu\omega - \text{συν}\omega)^2 = 1 - \eta\mu 2\omega$.
18. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu 2\omega}{1 + \text{συν} 2\omega}$.
19. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sigma\phi\omega - \epsilon\phi\omega = 2\sigma\phi 2\omega$.
20. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\epsilon\phi^2\omega = \frac{1 - \text{συν} 2\omega}{1 + \text{συν} 2\omega}$.
21. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma$ και $\text{συν}(A+B) = -\text{συν}\Gamma$.
22. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(3\eta\mu\omega + 4\text{συν}\omega)^2 + (4\eta\mu\omega - 3\text{συν}\omega)^2 = 25$.
23. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4R^2(\eta\mu^2A + \eta\mu^2B + \eta\mu^2\Gamma)$.
24. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $a\eta\mu A + b\eta\mu B + \gamma\eta\mu\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2R}$.
25. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\alpha(\beta\text{συν}\Gamma - \gamma\text{συν}B) = \beta^2 - \gamma^2$.

26. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 15° και 75° .

$$(Υπ. $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$ και $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. Απ. $\eta\mu 15^\circ = \sigma\upsilon\nu 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$).$$

27. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου 105° . (Υπ. $105^\circ = 90^\circ + 15^\circ$).

28. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $22,5^\circ$. (Υπ.

$$45^\circ = 22,5^\circ \times 2, \text{ Απ. } \eta\mu 22,5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}).$$

29. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 18° , 36° , 54° και 72° .

$$(Υπ. $18^\circ \times 2 + 18^\circ \times 3 = 90^\circ$,$$

$$\text{Απ. } \eta\mu 18^\circ = \sigma\upsilon\nu 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \eta\mu 36^\circ = \sigma\upsilon\nu 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}).$$

30. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$.

31. Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha$.

32. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha - \beta)\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha$.

33. Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta)\eta\mu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

34. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu(45^\circ - A)$.

35. Να αποδειχθεί ότι $1 + \eta\mu A = 2\eta\mu^2\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$.

36. Να αποδειχθεί ότι $1 + \sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)$.

37. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

38. Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha + 120^\circ) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha - 120^\circ) = \frac{3}{2}$.

39. Να αποδειχθεί ότι $\frac{1 + \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$.

40. Να αποδειχθεί ότι $\epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \eta\mu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha}$.

41. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu 20^\circ \eta\mu 40^\circ \eta\mu 60^\circ \eta\mu 80^\circ = \frac{3}{16}$.

42. Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu 20^\circ \sigma\upsilon\nu 40^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ \sigma\upsilon\nu 80^\circ = \frac{1}{16}$.

43. Να αποδειχθεί ότι $\epsilon\phi 20^\circ \epsilon\phi 40^\circ \epsilon\phi 60^\circ \epsilon\phi 80^\circ = 3$.

44. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$.

45. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

46. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

47. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(\sigma\nu\alpha - \sigma\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 = 4\eta\mu^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

48. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\epsilon\phi 3\alpha - \epsilon\phi 2\alpha - \epsilon\phi\alpha = \epsilon\phi 3\alpha\epsilon\phi 2\alpha\epsilon\phi\alpha.$$

49. Να αποδειχθεί ότι $1 + \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta > \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$.

50. Να αποδειχθεί ότι

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma - \eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) = 4\eta\mu \frac{\alpha + \beta}{2} \eta\mu \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \eta\mu \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

51. Να αποδειχθεί ότι

$$\sigma\nu\alpha + \sigma\nu\beta + \sigma\nu\gamma + \sigma\nu(\alpha + \beta + \gamma) = 4\sigma\nu\alpha \frac{\alpha + \beta}{2} \sigma\nu\alpha \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \sigma\nu\alpha \frac{\gamma + \alpha}{2}$$

52. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\nu\alpha \frac{A}{2} \sigma\nu\alpha \frac{B}{2} \sigma\nu\alpha \frac{\Gamma}{2}.$$

53. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\sigma\nu\alpha + \sigma\nu\beta + \sigma\nu\Gamma = 1 + 4\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}.$$

54. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\sigma\nu\alpha^2 A + \sigma\nu\beta^2 B + \sigma\nu\Gamma^2 = 1 - 2\sigma\nu\alpha\sigma\nu\beta\sigma\nu\Gamma.$$

55. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$2\beta\gamma\sigma\nu\alpha + 2\alpha\gamma\sigma\nu\beta + 2\alpha\beta\sigma\nu\Gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

56. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2} = \frac{\epsilon\phi\Gamma}{\epsilon\phi B}$.

57. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\beta\sigma\nu\Gamma + \gamma\sigma\nu\beta = \alpha$.

58. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\alpha\eta\mu(B-\Gamma) + \beta\eta\mu(\Gamma-A) + \gamma\eta\mu(A-B) = 0.$$

59. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$(\beta + \gamma)\sigma\nu\alpha + (\gamma + \alpha)\sigma\nu\beta + (\alpha + \beta)\sigma\nu\Gamma = 2\tau.$$

60. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\nu\alpha \frac{A}{2} \epsilon\phi \frac{A}{2} = \frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta\gamma}.$$

61. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$, τότε να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

62. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\alpha = 2\beta\sigma\nu\Gamma$, τότε να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

63. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $2\beta\eta\mu \frac{A}{2} = \alpha$, τότε να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

64. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $(\beta - \gamma)^2 + 4\beta\gamma\eta\mu^2 \frac{A}{2} = \alpha^2$.

65. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $2\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma = \frac{E}{R^2}$.

66. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho}{4R}$.

67. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = \frac{\tau}{4R}$.

68. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\epsilon\phi\frac{A}{2}\epsilon\phi\frac{B}{2}\epsilon\phi\frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho}{\tau}$.

69. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sigma\phi\frac{A}{2}\sigma\phi\frac{B}{2}\sigma\phi\frac{\Gamma}{2} = \frac{E}{\rho^2}$.

70. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sqrt{\rho R_\alpha R_\beta R_\gamma} = E$.

71. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\sigma\phi A$.

72. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} + \frac{1}{R_\gamma} = \frac{1}{\rho}$.

73. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{1}{2R\rho}$.

74. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $R_\alpha R_\beta + R_\beta R_\gamma + R_\gamma R_\alpha = \tau^2$.

75. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{1}{\rho}$.

76. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sigma\phi\frac{A}{2} + \sigma\phi\frac{B}{2} + \sigma\phi\frac{\Gamma}{2} = \frac{\tau}{\rho}$.

77. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $R_\alpha + R_\beta + R_\gamma = 4R + \rho$.

78. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\epsilon\phi\frac{A}{2} + \epsilon\phi\frac{B}{2} + \epsilon\phi\frac{\Gamma}{2} = \frac{4R + \rho}{\tau}$.

79. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} + \frac{1}{R_\gamma^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{E^2}.$$

80. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$2E = \sqrt[3]{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma}.$$

81. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\alpha\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2} + \beta\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} = \tau$.

82. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\alpha\eta\mu^2\frac{B}{2} + \beta\eta\mu^2\frac{A}{2} = \tau - \gamma$.

83. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}}$.

84. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\eta\mu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta\gamma}}$.

85. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει $\epsilon\phi\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\tau(\tau - \alpha)}}$.

86. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\upsilon_\alpha \upsilon_\beta + \upsilon_\beta \upsilon_\gamma + \upsilon_\gamma \upsilon_\alpha = \frac{2\rho\tau^2}{R}.$$

87. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$(\alpha - \beta)^2 \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} + (\alpha + \beta)^2 \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2} = \gamma^2.$$

88. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$(\alpha - \beta)\sigma\phi \frac{\Gamma}{2} + (\beta - \gamma)\sigma\phi \frac{\Lambda}{2} + (\gamma - \alpha)\sigma\phi \frac{\text{B}}{2} = 0.$$

89. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$(\beta + \gamma - \alpha)\left(\sigma\phi \frac{\text{B}}{2} + \sigma\phi \frac{\Gamma}{2}\right) = 2\alpha\sigma\phi \frac{\Lambda}{2}.$$

90. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu\Lambda + \sigma\upsilon\nu\text{B} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\gamma} \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}.$$

91. Αν σ' ένα τρίγωνο αληθεύη η σχέση $\beta^3 + \gamma^3 - \alpha^3 = 2(\tau - \alpha)\alpha^2$, τότε η γωνία Α του τριγώνου είναι ίση με 60° .

92. Αν σ' ένα τρίγωνο αληθεύη η σχέση $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 2\tau\alpha^2$, τότε η γωνία Α του τριγώνου είναι ίση με 60° .

93. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $E = \tau(\tau - \alpha)$, τότε το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

94. Αν σ' ένα τρίγωνο οι όροι $\sigma\phi \frac{\Lambda}{2}$, $\sigma\phi \frac{\text{B}}{2}$ και $\sigma\phi \frac{\Gamma}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, τότε να αποδειχθεί ότι και οι πλευρές α , β και γ του τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

95. Αν ισχύει $0^\circ < x < 45^\circ$, να αποδειχθεί ότι $\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$.

96. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + \alpha) - \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 0.$$

97. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\sigma\phi\alpha + \epsilon\phi(\pi + \alpha) + \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \epsilon\phi(2\pi - \alpha) = 0.$$

98. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sigma\upsilon\nu(\pi + \alpha) = 0.$$

99. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\eta\mu\left(a + \frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

100. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} = \epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta$.

101. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} = \sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha$.

102. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi\alpha}$.

103. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \varepsilon\phi\alpha}{1 + \varepsilon\phi\alpha}$.
104. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$.
105. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$.
106. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
 $\varepsilon\phi\text{A} + \varepsilon\phi\text{B} + \varepsilon\phi\text{Γ} = \varepsilon\phi\text{A}\varepsilon\phi\text{B}\varepsilon\phi\text{Γ}$.
107. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
 $\sigma\phi\text{A}\sigma\phi\text{B} + \sigma\phi\text{B}\sigma\phi\text{Γ} + \sigma\phi\text{Γ}\sigma\phi\text{A} = 1$.
108. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
 $\varepsilon\phi\frac{\text{A}}{2}\varepsilon\phi\frac{\text{B}}{2} + \varepsilon\phi\frac{\text{B}}{2}\varepsilon\phi\frac{\text{Γ}}{2} + \varepsilon\phi\frac{\text{Γ}}{2}\varepsilon\phi\frac{\text{A}}{2} = 1$.
109. Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει
 $\sigma\phi\frac{\text{A}}{2} + \sigma\phi\frac{\text{B}}{2} + \sigma\phi\frac{\text{Γ}}{2} = \sigma\phi\frac{\text{A}}{2}\sigma\phi\frac{\text{B}}{2}\sigma\phi\frac{\text{Γ}}{2}$.
110. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}$.
111. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}$.
112. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) = \frac{1 + \varepsilon\phi\omega}{1 - \varepsilon\phi\omega}$.
113. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = \frac{1 - \varepsilon\phi\omega}{1 + \varepsilon\phi\omega}$.
114. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha} = 0$.
115. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta = \frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}$.
116. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha = \frac{2\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}$.
117. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\sigma\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta = \frac{2\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)}$.

118. Να αποδειχθεί ότι το παρακάτω κλάσμα είναι ανεξάρτητο του x

$$\frac{\eta\mu(\alpha+x)-\eta\mu(\alpha-x)}{\sigma\upsilon\nu(\beta-x)-\sigma\upsilon\nu(\beta+x)}.$$
119. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\eta\mu\alpha\eta\mu(\beta-\gamma)+\eta\mu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)+\eta\mu\gamma\eta\mu(\alpha-\beta)=0.$$
120. Αν ισχύει $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, να αποδειχθεί ότι $(1+\varepsilon\phi\alpha)(1+\varepsilon\phi\beta)=2$.
121. Αν σ' ένα τρίγωνο είναι $A=45^\circ$, να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(1+\sigma\phi B)(1+\sigma\phi\Gamma)=2$$
122. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του α

$$\eta\mu\alpha+\eta\mu\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\eta\mu\alpha\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$$
123. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του α

$$\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\alpha\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$$
124. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του α

$$\eta\mu\alpha+\eta\mu\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\eta\mu\alpha\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$$
125. Αν τα α και β είναι μικρότερα των 90° , να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\eta\mu(\alpha+\beta)<\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta$$
126. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του α

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right).$$
127. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+x)-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)=\eta\mu^2\alpha.$$
128. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\eta\mu^2x+\eta\mu^2(\alpha+x)-2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(\alpha+x)=\eta\mu^2\alpha.$$
129. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu\Gamma\eta\mu A}+\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu A\eta\mu B}=2.$$
130. Αν το ω είναι τυχαία γωνία, να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\alpha\sigma\upsilon\nu(B-\omega)+\beta\sigma\upsilon\nu(A+\omega)=\gamma\sigma\upsilon\nu\omega.$$
131. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\varepsilon\phi B=\frac{\beta\eta\mu A}{\gamma-\beta\sigma\upsilon\nu A}.$$
132. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\alpha\eta\mu(B-\Gamma)+\beta\eta\mu(\Gamma-A)+\gamma\eta\mu(A-B)=0.$$
133. Αν οι πλευρές α , β και γ ενός τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\phi\frac{A}{2}\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{3}$.

134. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\frac{\varepsilon\phi B}{\varepsilon\phi\Gamma} = \frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2\Gamma}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.
135. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\varepsilon\phi B = \frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\eta\mu A - \eta\mu(B-\Gamma)}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
136. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B} = 2\sigma\upsilon\nu\Gamma$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
137. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\frac{\alpha - 2\gamma\sigma\upsilon\nu B}{\gamma\eta\mu B} + \frac{\beta - 2\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha\eta\mu\Gamma} + \frac{\gamma - 2\beta\sigma\upsilon\nu A}{\beta\eta\mu A} = 0.$$
138. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{\eta\mu 2\phi}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\phi} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{1 + \sigma\upsilon\nu\phi} = \varepsilon\phi \frac{\phi}{2}$.
139. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\varepsilon\phi^2 \left(\frac{\pi}{4} - \phi \right) = \frac{1 - \eta\mu 2\phi}{1 + \eta\mu 2\phi}$.
140. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\beta^2 \eta\mu 2\Gamma + \gamma^2 \eta\mu 2B = 2\beta\gamma\eta\mu A.$$
141. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$4\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = -\sigma\upsilon\nu 3\alpha.$$
142. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\varepsilon\phi\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = -\varepsilon\phi 3\alpha.$$
143. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $3 - 4\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 4x = 8\eta\mu^4 x$.
144. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(\varepsilon\phi 2\alpha - \varepsilon\phi\alpha)(\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) = 2\eta\mu\alpha.$$
145. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\eta\mu 3\alpha\eta\mu^3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha\sigma\upsilon\nu^3\alpha = \sigma\upsilon\nu^3 2\alpha.$$
146. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$4\sigma\upsilon\nu 3\alpha\eta\mu^3\alpha + 4\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu^3\alpha = 3\eta\mu 4\alpha.$$
147. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \varepsilon\phi\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 3\varepsilon\phi 3\alpha.$$
148. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{\varepsilon\phi^2 2\alpha - \varepsilon\phi^2 \alpha}{1 - \varepsilon\phi^2 2\alpha\varepsilon\phi^2 \alpha} = \varepsilon\phi 3\alpha\varepsilon\phi\alpha.$
149. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{(1 - \alpha^2)\eta\mu 2x - 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu x - \alpha\sigma\upsilon\nu x}$.
150. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\eta\mu 5\alpha = 5\eta\mu\alpha - 20\eta\mu^3\alpha + 16\eta\mu^5\alpha.$

151. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\sigma\nu\nu 5\alpha = 16\sigma\nu\nu^5\alpha - 20\sigma\nu\nu^3\alpha + 5\sigma\nu\nu\alpha.$$

152. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\frac{1 - \varepsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 + \varepsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \eta\mu 2\alpha.$

153. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha.$

154. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $1 + \eta\mu 2\alpha.$

155. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha + \sigma\nu\nu\alpha.$

156. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\sigma\nu\nu 3\alpha + \sigma\nu\nu 5\alpha.$

157. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\sigma\nu\nu 4\alpha - \sigma\nu\nu\alpha.$

158. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha + 2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha.$

159. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\nu\nu \frac{A}{2} \sigma\nu\nu \frac{B}{2} \sigma\nu\nu \frac{\Gamma}{2}.$$

160. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta - 1.$

161. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η εξής ισότητα

$$\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B - \eta\mu^2 \Gamma = 2\eta\mu A \eta\mu B \sigma\nu\nu \Gamma.$$

162. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta.$

163. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\sigma\nu\nu^2\alpha - \sigma\nu\nu^2\beta.$

164. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha - \sigma\nu\nu\alpha.$

165. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha - \sigma\nu\nu\beta.$

166. Να γίνει πηλίκο η παρακάτω παράσταση $1 + \varepsilon\phi\alpha.$

167. Να γίνει πηλίκο η παρακάτω παράσταση $1 + \sigma\phi\alpha.$

168. Να γίνει πηλίκο η παρακάτω παράσταση $1 + \varepsilon\phi^2\alpha.$

169. Να γίνει πηλίκο η παρακάτω παράσταση $\varepsilon\phi^2\alpha - \varepsilon\phi^2\beta.$

170. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 2\alpha - \eta\mu\alpha.$

171. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\sigma\nu\nu\alpha - \sigma\nu\nu 3\alpha + \sigma\nu\nu 5\alpha.$

172. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 7\alpha.$

173. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $1 + \eta\mu\alpha + \sigma\nu\nu\alpha.$

174. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(\sigma\nu\nu\omega + \sigma\nu\nu\phi)^2 + (\eta\mu\omega + \eta\mu\phi)^2 = 4\sigma\nu\nu^2 \left(\frac{\omega - \phi}{2}\right).$$

175. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(\sigma\nu\nu\omega + \sigma\nu\nu\phi)^2 + (\eta\mu\omega - \eta\mu\phi)^2 = 4\sigma\nu\nu^2 \left(\frac{\omega + \phi}{2}\right).$$

176. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(\sigma\nu\nu\omega - \sigma\nu\nu\phi)^2 + (\eta\mu\omega - \eta\mu\phi)^2 = 4\eta\mu^2 \left(\frac{\omega - \phi}{2}\right).$$

177. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$(\sigma\nu\nu\omega - \sigma\nu\nu\phi)^2 + (\eta\mu\omega + \eta\mu\phi)^2 = 4\eta\mu^2 \left(\frac{\omega + \phi}{2}\right).$$

178. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση
 $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma - \eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$.
179. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση
 $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma)$.
180. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση
 $\eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\beta - \gamma) + \eta\mu(\gamma - \alpha)$.
181. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
 $\eta\mu A + \eta\mu B - \eta\mu\Gamma = 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$.
182. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
 $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma - 1 = 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$.
183. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
 $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = 4\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$.
184. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
 $\eta\mu^4 A + \eta\mu^4 B + \eta\mu^4\Gamma = -4\eta\mu^2 A\eta\mu^2 B\eta\mu^2\Gamma$.
185. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta - \eta\mu^2(\alpha - \beta)$.
186. Να γίνει γινόμενο η παρακάτω παράσταση
 $\sigma\upsilon\nu^2(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha - \beta) - 1$.
187. Να γίνει γινόμενο (τέλειο τετράγωνο) η παρακάτω παράσταση
 $1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$.
188. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
 $\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1 - 2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$.
189. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
 $\eta\mu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{B}{2} + \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} = 1 - 2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$.
190. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
 $\eta\mu\frac{A}{2} + \eta\mu\frac{B}{2} + \eta\mu\frac{\Gamma}{2} - 1 = 4\eta\mu\frac{\pi - A}{4}\eta\mu\frac{\pi - B}{4}\eta\mu\frac{\pi - \Gamma}{4}$.
191. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει
 $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi + A}{4}\eta\mu\frac{\pi + B}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi - \Gamma}{4}$.
192. Να απλοποιηθεί το παρακάτω κλάσμα $\frac{\eta\mu\delta\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\delta\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\delta\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\alpha\eta\mu\delta\alpha}$.
193. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = -\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.
194. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(\gamma - \alpha) - \eta\mu\alpha\eta\mu(\gamma - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\gamma$.
195. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\eta\mu^2(\alpha - \beta) + \eta\mu^2\beta + 2\eta\mu(\alpha - \beta)\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu^2\alpha$.
196. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\eta\mu\alpha\eta\mu(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta\eta\mu(\gamma - \alpha) + \eta\mu\gamma\eta\mu(\alpha - \beta) = 0$.
197. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα
 $\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(\beta - \gamma) + \sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu(\gamma - \alpha) + \sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu(\alpha - \beta) = 0$.

198. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\frac{\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\beta} = \varepsilon\phi(\alpha + \beta).$$

199. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\frac{\eta\mu 7\alpha}{\eta\mu\alpha} - 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 2\sigma\upsilon\nu 4\alpha - 2\sigma\upsilon\nu 6\alpha = 1.$$

200. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\beta\sigma\upsilon\nu\beta + \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu(\beta - \Gamma).$$

201. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\eta\mu(\beta - \Gamma)}{\eta\mu(\beta + \Gamma)}$.

202. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha(\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\Gamma) = 2(\beta + \gamma)\eta\mu^2 \frac{A}{2}.$$

203. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha(\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\Gamma) = 2(\gamma - \beta)\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2}.$$

204. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \beta\sigma\upsilon\nu\beta + \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = 4R\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\Gamma.$$

205. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$(\beta^2 - \gamma^2)\sigma\phi\alpha + (\gamma^2 - \alpha^2)\sigma\phi\beta + (\alpha^2 - \beta^2)\sigma\phi\Gamma = 0.$$

206. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

207. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu\beta + \eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\Gamma}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

208. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\varepsilon\phi\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\beta - \Gamma)}{\eta\mu\alpha - \eta\mu(\beta - \Gamma)}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

209. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = 2\sigma\upsilon\nu\Gamma$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

210. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + \frac{\rho}{R}$.

211. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \beta\sigma\upsilon\nu\beta + \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{2E}{R}.$$

212. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\Gamma = \frac{E}{R\rho}$.

213. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha\sigma\phi\alpha + \beta\sigma\phi\beta + \gamma\sigma\phi\Gamma = 2(R + \rho).$$

214. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\Gamma.$$

215. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu\text{A}\eta\mu\text{B}\eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu\text{B}\eta\mu\Gamma\eta\mu\text{A} + \sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu\text{A}\eta\mu\text{B} = 1 + \sigma\upsilon\nu\text{A}\sigma\upsilon\nu\text{B}\sigma\upsilon\nu\Gamma$$
216. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\varepsilon\phi\kappa\text{A} + \varepsilon\phi\kappa\text{B} + \varepsilon\phi\kappa\Gamma = \varepsilon\phi\kappa\text{A}\varepsilon\phi\kappa\text{B}\varepsilon\phi\kappa\Gamma, \text{ όπου } \kappa \text{ ακέραιος.}$$
217. Να βρεθεί το ανάπτυγμα του $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$.
218. Να βρεθεί το ανάπτυγμα του $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma)$.
219. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\rho^2 + \tau^2 + 4R\rho = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.
220. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\tau^2 - \rho^2 - 4R\rho).$$
221. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2(1 + \sigma\upsilon\nu\text{A}\sigma\upsilon\nu\text{B}\sigma\upsilon\nu\Gamma).$$
222. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\eta\mu^3\text{A} + \eta\mu^3\text{B} + \eta\mu^3\Gamma = 3\sigma\upsilon\nu\frac{\text{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\text{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\text{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\text{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\Gamma}{2}.$$
223. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu^3\text{A} + \sigma\upsilon\nu^3\text{B} + \sigma\upsilon\nu^3\Gamma - 1 = 3\eta\mu\frac{\text{A}}{2}\eta\mu\frac{\text{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} - \eta\mu\frac{3\text{A}}{2}\eta\mu\frac{3\text{B}}{2}\eta\mu\frac{3\Gamma}{2}.$$
224. Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, τότε να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα

$$\frac{\eta\mu(\alpha + x) - \eta\mu(\alpha - x)}{\sigma\upsilon\nu(\beta - x) - \sigma\upsilon\nu(\beta + x)} = 1.$$
225. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\alpha\eta\mu\left(\frac{\text{A}}{2} + \Gamma\right) = (\beta + \gamma)\eta\mu\frac{\text{A}}{2}$.
226. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\frac{\alpha^2\eta\mu(\text{B} - \Gamma)}{\eta\mu\text{B} + \eta\mu\Gamma} + \frac{\beta^2\eta\mu(\Gamma - \text{A})}{\eta\mu\Gamma + \eta\mu\text{A}} + \frac{\gamma^2\eta\mu(\text{A} - \text{B})}{\eta\mu\text{A} + \eta\mu\text{B}} = 0.$$
227. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\frac{\alpha\eta\mu(\text{B} - \Gamma)}{\beta^2 - \gamma^2} = \frac{\beta\eta\mu(\Gamma - \text{A})}{\gamma^2 - \alpha^2} = \frac{\gamma\eta\mu(\text{A} - \text{B})}{\alpha^2 - \beta^2}.$$
228. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha\eta\mu\frac{\text{A}}{2}\eta\mu\frac{\text{B} - \Gamma}{2} + \beta\eta\mu\frac{\text{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma - \text{A}}{2} + \gamma\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\text{A} - \text{B}}{2} = 0.$$
229. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\text{B} - \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\tau - \alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma - \sigma\upsilon\nu\text{A}}{\tau - \beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\text{A} - \sigma\upsilon\nu\text{B}}{\tau - \gamma} = 0.$$
230. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2}\eta\mu 2\text{A} + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\beta^2}\eta\mu 2\text{B} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2}\eta\mu 2\Gamma = 0.$$
231. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha^3\sigma\upsilon\nu(\text{B} - \Gamma) + \beta^3\sigma\upsilon\nu(\Gamma - \text{A}) + \gamma^3\sigma\upsilon\nu(\text{A} - \text{B}) = 3\alpha\beta\gamma.$$

232. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
233. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
234. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\alpha^2(\sigma\upsilon\nu^2 B - \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma) + \beta^2(\sigma\upsilon\nu^2 \Gamma - \sigma\upsilon\nu^2 A) + \gamma^2(\sigma\upsilon\nu^2 A - \sigma\upsilon\nu^2 B) = 0$.
235. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\sigma\phi^2 A + \sigma\phi^2 B + \sigma\phi^2 \Gamma \geq 1$.
236. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\varepsilon\phi^2 \frac{A}{2} + \varepsilon\phi^2 \frac{B}{2} + \varepsilon\phi^2 \frac{\Gamma}{2} \geq 1$.
237. Να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $2\eta\mu^2 \beta + 4\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\eta\mu\alpha\eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu 2(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.
238. Αν είναι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = k\pi$, όπου k ακέραιος τότε να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\eta\mu(\alpha + \delta)\eta\mu(\gamma + \delta) = \eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\gamma + \beta)$.
239. Αν είναι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = k\pi$, όπου k ακέραιος τότε να αποδειχθεί η παρακάτω ισότητα $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \delta)\sigma\upsilon\nu(\gamma + \delta) = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma + \beta)$.
240. Να αποδειχθεί η παρακάτω ταυτότητα $\frac{\eta\mu\alpha + \lambda\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \lambda\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha} = \varepsilon\phi 3\alpha$.
241. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\frac{\varepsilon\phi A + \varepsilon\phi B}{\eta\mu 2\Gamma} = \frac{\varepsilon\phi B + \varepsilon\phi \Gamma}{\eta\mu 2A} = \frac{\varepsilon\phi \Gamma + \varepsilon\phi A}{\eta\mu 2B}$.
242. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\eta\mu^3 A \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) + \eta\mu^3 B \sigma\upsilon\nu(\Gamma - A) + \eta\mu^3 \Gamma \sigma\upsilon\nu(A - B) = 3\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma$.
243. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\eta\mu^4 A + \eta\mu^4 B + \eta\mu^4 \Gamma = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2A \sigma\upsilon\nu 2B \sigma\upsilon\nu 2\Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma + \frac{3}{2}$.
244. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\sigma\upsilon\nu^4 A + \sigma\upsilon\nu^4 B + \sigma\upsilon\nu^4 \Gamma = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2A \sigma\upsilon\nu 2B \sigma\upsilon\nu 2\Gamma - 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma + \frac{1}{2}$.
245. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\sigma\phi\lambda A \sigma\phi\lambda B + \sigma\phi\lambda B \sigma\phi\lambda \Gamma + \sigma\phi\lambda \Gamma \sigma\phi\lambda A = 1$, όπου λ ακέραιος.
246. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu 4A + \eta\mu 4B + \eta\mu 4\Gamma = 0$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
247. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu 3A + \eta\mu 3B + \eta\mu 3\Gamma = 0$, να αποδειχθεί ότι μία τουλάχιστον γωνία του τριγώνου είναι ίση με 60° .
248. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\sigma\upsilon\nu 3A + \sigma\upsilon\nu 3B + \sigma\upsilon\nu 3\Gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι μία τουλάχιστον γωνία του τριγώνου είναι ίση με 120° .
249. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 2\tau\alpha^2$ και $\eta\mu B \eta\mu \Gamma = \eta\mu^2 A$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
250. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4(\sigma\phi A + \sigma\phi B + \sigma\phi \Gamma)} = E$.

251. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B}{2} - \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = 1$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
252. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\epsilon\phi \frac{A}{2} + \epsilon\phi \frac{B}{2} + \epsilon\phi \frac{\Gamma}{2} + \epsilon\phi \frac{A}{2} \epsilon\phi \frac{B}{2} \epsilon\phi \frac{\Gamma}{2} = 2$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
253. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \frac{\alpha^2}{2E}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.