

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Αν a και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ , τέτοιοι ώστε :

$$\alpha = \pi\beta + \upsilon, \text{ όπου } 0 \leq \upsilon \leq \beta$$

Η διαδικασία για να βρούμε τα π και υ λέγεται *ευκλείδεια* ή *αλγοριθμική διαίρεση* του a με το β , το π λέγεται *πηλίκο* και το υ *υπόλοιπο* της διαίρεσης. Τα δυνατά υπόλοιπα της ευκλείδειας διαίρεσης του a με τον $\beta > 0$ είναι οι αριθμοί $0, 1, 2, \dots, \beta-1$.

Αν $\upsilon = 0$, τότε ο ακέραιος a έχει τη μορφή $a = 2\kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ και λέγεται *άρτιος*, ενώ αν $\upsilon = 1$, τότε ο ακέραιος a έχει τη μορφή $a = 2\kappa+1$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ και λέγεται *περιττός*.

Τέλειος λέγεται ο αριθμός που είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του εκτός από τον ίδιο τον αριθμό. Τέτοιος αριθμός είναι, για παράδειγμα, ο 28, καθώς $28 = 1+2+4+7+14$. Άλλοι τέλειοι αριθμοί είναι οι 6, 496 και 8128. Μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί 36 τέλειοι αριθμοί.

Η ΤΕΛΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Αν a και β είναι ακέραιοι αριθμοί με $\beta \neq 0$, θα λέμε ότι ο β *διαιρεί τον* a και θα γράφουμε $\beta \mid a$, όταν η διαίρεση του a με τον β είναι τέλεια, δηλαδή έχει υπόλοιπο ίσο με μηδέν και συνεπώς υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός κ , ώστε να ισχύει $a = \kappa\beta$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο β είναι *διαιρέτης* ή *παράγοντας* του a ή ότι ο a *διαιρείται με τον* β ή ότι ο a είναι *πολλαπλάσιο του* β ($a = \text{πολ}\beta$).

Ισχύουν τα εξής :

- $\pm 1 \mid a, \forall a \in \mathbb{Z}^*$.
- $\pm a \mid a, \forall a \in \mathbb{Z}^*$.
- $\beta \mid 0, \forall \beta \in \mathbb{Z}^*$.
- Αν $\beta \mid a$, τότε $\kappa\beta \mid \kappa a, \forall \kappa \in \mathbb{Z}^*$.
- Αν $a \mid \beta$ και $\beta \mid a$, τότε ή $a = \beta$ ή $a = -\beta$.
- Αν $a \mid \beta$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $a \mid \gamma$.

- Αν $a \mid \beta$, τότε $a \mid \lambda\beta$, όπου λ ακέραιος.
- Αν $a \mid \beta$ και $a \mid \gamma$, τότε $a \mid (\beta + \gamma)$.
- Αν $a \mid \beta$ και $\beta \neq 0$, τότε $|a| \leq |\beta|$.
- Αν $a \mid \beta$ και $a \mid \gamma$, τότε $a \mid (κβ + λγ)$, $\forall κ$ και $λ \in \mathbb{Z}^*$.

Ο ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

Ένας ακέραιος δ λέγεται **κοινός διαιρέτης** των ακεραίων a και β , όταν είναι διαιρέτης και του a και του β . Ορίζουμε ως **μέγιστο κοινό διαιρέτη (ΜΚΔ)** δύο ακεραίων a και β , από τους οποίους ένας τουλάχιστον είναι διάφορος του μηδενός, και τον συμβολίζουμε με (a, β) , τον μεγαλύτερο από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες τους.

Ισχύουν τα εξής :

$$\begin{aligned} & \delta \mid a \text{ και } \delta \mid \beta \\ & \text{Αν } x \mid a \text{ και } x \mid \beta, \text{ τότε } x \leq \delta \\ & (a, \beta) = (|a|, |\beta|) \\ & (a, a) = a \\ & (a, 0) = a \\ & (a, 1) = 1 \\ & \text{Αν } \beta \mid a, \text{ τότε } (a, \beta) = \beta \\ & \text{Αν } (a, \beta) = 1, \text{ τότε } a \text{ και } \beta \\ & \text{πρώτοι μεταξύ τους} \end{aligned}$$

Για να βρούμε τον ΜΚΔ μεγάλων ακεραίων αριθμών, χρησιμοποιούμε τον **ευκλείδειο αλγόριθμο**, όπου κάνουμε διαδοχικές ακέραιες διαιρέσεις. Από τη διαίρεση των a και β προκύπτει ένα υπόλοιπο v_1 , μετά διαιρούμε τα β και v_1 , οπότε προκύπτει ένα υπόλοιπο v_2 , μετά διαιρούμε τα v_1 και v_2 κοκ. Ο ΜΚΔ είναι το **τελευταίο θετικό υπόλοιπο** των παραπάνω αλγοριθμικών διαιρέσεων.

Αν a και β είναι φυσικοί αριθμοί και v είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσής τους, τότε ισχύει :

$$(a, \beta) = (\beta, v)$$

Αποδεικνύεται ότι αν $\delta = (a, \beta)$, τότε υπάρχουν ακέραιοι κ και λ , ώστε να ισχύει :

$$\delta = \kappa a + \lambda \beta$$

Ισχύουν τα εξής :

- Δύο ακέραιοι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους, αν και μόνο αν υπάρχουν ακέραιοι κ και λ , ώστε να ισχύει : $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$.
- Αν διαιρέσουμε δύο ακεραίους με τον ΜΚΔ τους, τότε προκύπτουν αριθμοί που είναι πρώτοι μεταξύ τους.
- Οι κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων είναι οι διαιρέτες του μέγιστου κοινού διαιρέτη τους.
- Αν ένας ακέραιος διαιρεί το γινόμενο δύο ακεραίων και είναι πρώτος προς τον έναν, τότε διαιρεί τον άλλον.
- Ο ΜΚΔ τριών ή περισσότερων ακεραίων δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε δύο από αυτούς με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη τους.

ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Ένας ακέραιος γ λέγεται *κοινό πολλαπλάσιο* των ακεραίων α και β , διαφορετικών από το μηδέν, όταν είναι πολλαπλάσιο και του α και του β . Ορίζουμε ως *ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)* δύο ακεραίων α και β , οι οποίοι είναι διάφοροι του μηδενός, και το συμβολίζουμε με $[\alpha, \beta]$, το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσια των α και β .

Ισχύουν τα εξής :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [\alpha, \beta] \\ \text{Αν } x &= \text{πο}\alpha \text{ και } x = \text{πο}\beta, \\ \text{τότε } \varepsilon &\leq x \\ [\alpha, \beta] &= [|\alpha|, |\beta|] \\ (\alpha, \beta) \cdot [\alpha, \beta] &= \alpha \cdot \beta \\ [\alpha, 1] &= \alpha \\ \text{Αν } \beta \mid \alpha, \text{ τότε } [\alpha, \beta] &= \alpha \end{aligned}$$

- Το ΕΚΠ δύο πρώτων μεταξύ τους ακεραίων είναι το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους.
- Το ΕΚΠ δύο ακεραίων διαιρεί κάθε άλλο κοινό πολλαπλάσιό τους.
- Τα κοινά πολλαπλάσια δύο ακεραίων είναι τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ.
- Το ΕΚΠ τριών ή περισσότερων ακεραίων δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε δύο από αυτούς με το ΕΚΠ τους.

ΟΙ ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Κάθε ακέραιος αριθμός διάφορος του μηδέν, του 1 και του -1 λέγεται **πρώτος αριθμός** αν οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του είναι ο 1 και η απόλυτη τιμή του αριθμού. Ένας ακέραιος αριθμός που δεν είναι πρώτος, λέγεται **σύνθετος**.

Οι αριθμοί 1 και -1 δεν χαρακτηρίζονται ούτε ως πρώτοι ούτε ως σύνθετοι. Ο 2 είναι ο μοναδικός άρτιος αριθμός που είναι πρώτος καθώς όλοι οι άλλοι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί.

Αν έχουμε έναν θετικό αριθμό a , για να βρούμε αν είναι πρώτος ή σύνθετος, μπορούμε να κάνουμε διαδοχικές διαιρέσεις με τους ακεραίους από το 2 έως το $a-1$. Αν κανένας αριθμός δεν διαιρεί τον a , τότε ο a είναι πρώτος, αλλιώς είναι σύνθετος.

Ισχύουν τα εξής :

- Κάθε θετικός ακέραιος αριθμός > 1 έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη.
- Αν $a > 1$ είναι ένας σύνθετος ακέραιος, τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον πρώτος αριθμός p , τέτοιος ώστε να ισχύει $p \mid a$ και $p \leq \sqrt{a}$. Αυτό είναι σημαντικό καθώς έτσι είναι αρκετό να ελέγχουμε τους αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι με \sqrt{a} προκειμένου να διαπιστώσουμε αν ένας αριθμός a είναι πρώτος.
- Υπάρχουν άπειροι θετικοί πρώτοι αριθμοί.
- Αν ένας πρώτος αριθμός διαιρεί ένα γινόμενο ακεραίων, τότε διαιρεί έναν τουλάχιστον από τους ακεραίους αυτούς.
- Κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων παραγόντων, όπου κάποιοι πρώτοι παράγοντες μπορεί να είναι υψωμένοι σε δύναμη. Η μορφή αυτή στην οποία αναγράφεται ένας θετικός ακέραιος ως γινόμενο πρώτων παραγόντων αποκαλείται **κανονική μορφή** του αριθμού.
- Ο ΜΚΔ θετικών ακεραίων οι οποίοι είναι γραμμένοι σε κανονική μορφή, είναι ίσος με το γινόμενο των κοινών τους παραγόντων, όπου ο κάθε παράγοντας είναι υψωμένος στον μικρότερο εμφανιζόμενο εκθέτη.
- Το ΕΚΠ θετικών ακεραίων οι οποίοι είναι γραμμένοι σε κανονική μορφή, είναι ίσο με το γινόμενο των κοινών και μη κοινών τους παραγόντων, όπου ο κάθε παράγοντας είναι υψωμένος στον μεγαλύτερο εμφανιζόμενο εκθέτη.

Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Γραμμική διοφαντική εξίσωση καλείται μια εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$, όπου a, β και γ είναι ακέραιοι αριθμοί με $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$. Αναζητούμε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης αυτής, δηλαδή τα ζευγάρια των ακεραίων αριθμών (x, y) που την επαληθεύουν.

Ισχύει το εξής :

Η γραμμική διοφαντική εξίσωση $ax + by = \gamma$ έχει λύση, αν και μόνο αν ο ΜΚΔ $= \delta$ των a και β διαιρεί τον γ . Αν η εξίσωση αυτή έχει μια λύση, την (x_0, y_0) , τότε έχει άπειρες το πλήθος λύσεις (x, y) , οι οποίες δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

$$x = x_0 + \frac{\beta}{\delta}t, y = y_0 - \frac{\alpha}{\delta}t, t \in \mathbb{Z}$$

Ισχύουν τα εξής :

- Αν οι ακέραιοι a, β, γ έχουν ΜΚΔ $\delta \neq 1$, τότε η εξίσωση $\frac{\alpha}{\delta}x + \frac{\beta}{\delta}y = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $ax + by = \gamma$.
- Αν οι a, β, γ είναι πρώτοι μεταξύ τους και οι a και β έχουν κοινό διαιρέτη $\delta \neq 1$, τότε η $ax + by = \gamma$ δεν έχει καμία ακέραια λύση.
- Αν οι a, β είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η εξίσωση $ax + by = \gamma$ έχει ακέραια λύση.
- Αν η εξίσωση $ax + by = \gamma$ έχει μια ακέραια λύση, την (x_0, y_0) , τότε θα έχει και άλλες άπειρες το πλήθος λύσεις, της μορφής $(x_0 - \beta k, y_0 + \alpha k)$ ή της μορφής $(x_0 + \beta k, y_0 - \alpha k)$ όπου $k \in \mathbb{Z}$, και μόνο αυτές.

ΟΙ ΙΣΟΫΠΟΛΟΙΠΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Δύο ακέραιοι αριθμοί α και β λέγονται *ισοϋπόλοιποι με μέτρο m* , όταν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός m , ώστε οι δύο αριθμοί διαιρούμενοι με τον m να αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Γράφουμε το εξής :

$$\alpha = \beta(\text{mod}m)$$

Ισχύει το εξής :

$$\alpha = \nu(\text{mod}m), \text{ όπου } \alpha = \pi \cdot m + \nu$$

Ισχύει :

$$\alpha = \beta(\text{mod}m) \Leftrightarrow m \mid (\alpha - \beta)$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα :

Αν $\alpha = \beta(\text{mod}m)$ και $\gamma = \delta(\text{mod}m)$, τότε :

- $\alpha + \gamma = \beta + \delta(\text{mod}m)$
- $\alpha - \gamma = \beta - \delta(\text{mod}m)$
- $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta(\text{mod}m)$

Αν $\alpha = \beta(\text{mod}m)$, τότε $\forall \gamma \in \mathbb{Z}$:

- $\alpha + \gamma = \beta + \gamma(\text{mod}m)$
- $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma(\text{mod}m)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν ο α είναι ακέραιος, τότε είναι ακέραιος και ο $\frac{\alpha(\alpha^2 + 2)}{3}$.
2. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός.
3. Να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου μπορεί να γραφεί στη μορφή $8\lambda + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$.
4. Να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο ενός ακεραίου α μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha^2 = 3\kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ ή τη μορφή $\alpha^2 = 3\kappa + 1$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. (Υπ. Θέτουμε $\alpha^2 = (3\pi + \nu)^2$, όπου $\nu = 0$ ή 1 ή 2).
5. Αν οι α, β και γ είναι περιττοί ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.
6. Να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο ενός άρτιου αριθμού είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$ και το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$.
7. Να αποδειχθεί ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος αριθμός p για τον οποίο ισχύει $3p + 1 = \nu^2$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, είναι ο 5.
8. Να αποδειχθεί ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος αριθμός p που μπορεί να πάρει την μορφή $p = \nu^3 - 1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, είναι ο 7.
9. Να αποδειχθεί ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος αριθμός p που μπορεί να πάρει την μορφή $p = \nu^3 + 1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, είναι ο 2.
10. Αν α και β είναι δύο θετικοί περιττοί ακέραιοι > 1 , τότε να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος αριθμός $\alpha^2 + \beta^2$ είναι σύνθετος.
11. Αν $\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ και $(\alpha, \beta) = 1$, τότε να αποδειχθεί ότι $(\alpha^\mu, \beta^\nu) = 1$.
12. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\nu^2 + \nu + 1$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, είναι πρώτος.
13. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\nu^2 - \nu + 1$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, είναι πρώτος.
14. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x + 3y = 5$.
15. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $6x - 4y = 8$.
16. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $5x - 3y = 7$.
17. Να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος $3\alpha - 1$, όπου $\alpha \in \mathbb{Z}$, δεν είναι ποτέ τετράγωνο ακεραίου.
18. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$, ισχύει: $\alpha^3 = \alpha \pmod{6}$.
19. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$, ισχύει: $\alpha^5 = \alpha \pmod{10}$.
20. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα $\nu \geq 2$ διαδοχικών περιττών φυσικών αριθμών είναι σύνθετος αριθμός.
21. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι $(\alpha^2, \beta^2) = (\alpha, \beta)^2$.
22. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3x + 5y = -12$.
23. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $13x + 21y = 91$.
24. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $-x + 4y = 1$.
25. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $40x + 51y = 121$.
26. Να βρεθούν οι ακέραιες και θετικές τιμές του x , ώστε να είναι ακέραια και θετική η παρακάτω παράσταση: $\frac{7x - 15}{3}$.

27. Να βρεθούν οι ακέραιες και θετικές τιμές του x , ώστε να είναι ακέραια και θετική η παρακάτω παράσταση : $\frac{133 - 2x}{3}$.
28. Να βρεθούν οι ακέραιες και θετικές τιμές του x , ώστε να είναι ακέραια και θετική η παρακάτω παράσταση : $\frac{1053 - 31x}{14}$.
29. Να βρεθεί διψήφιος αριθμός ώστε το ένα τρίτο της διαφοράς του ψηφίου των δεκάδων από τον αριθμό να είναι ίσο με το διπλάσιο του ψηφίου των μονάδων αυξημένο κατά 5. (Απ. 56).
30. Να βρεθεί τριψήφιος αριθμός του οποίου τα ψηφία έχουν άθροισμα 7 και ο αριθμός δεν αλλάζει αν εναλλάγουν τα ψηφία των εκατοντάδων και των μονάδων. (Απ. 313, 232, 151).