ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, τέτοιοι ώστε :

$$\boxed{\alpha = \pi\beta + \upsilon, \text{ όπου } 0 \leq \upsilon \leq \beta}$$

Η διαδικασία για να βρούμε τα π και υ λέγεται ***ευκλείδεια*** ή ***αλγοριθμική διαίρεση*** του α με το β, το π λέγεται ***πηλίκο*** και το υ ***υπόλοιπο*** της διαίρεσης. Τα δυνατά υπόλοιπα της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $\beta > 0$ είναι οι αριθμοί 0, 1, 2, ..., β–1 .

Αν $\upsilon = 0$, τότε ο ακέραιος α έχει τη μορφή $\alpha = 2\kappa$, όπου $\kappa \in Z$ και λέγεται ***άρτιος***, ενώ αν $\upsilon = 1$, τότε ο ακέραιος α έχει τη μορφή $\alpha = 2\kappa+1$, όπου $\kappa \in Z$ και λέγεται ***περιττός***.

Τέλειος λέγεται ο αριθμός που είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του εκτός από τον ίδιο τον αριθμό. Τέτοιος αριθμός είναι, για παράδειγμα, ο 28, καθώς $28 = 1+2+4+7+14$. Άλλοι τέλειοι αριθμοί είναι οι 6, 496 και 8128. Μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί 36 τέλειοι αριθμοί.

Η ΤΕΛΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Αν α και β είναι ακέραιοι αριθμοί με $\beta \neq 0$, θα λέμε ότι ο ***β διαιρεί τον α*** και θα γράφουμε $\beta \mid \alpha$, όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή έχει υπόλοιπο ίσο με μηδέν και συνεπώς υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός κ, ώστε να ισχύει $\alpha = \kappa\beta$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο β είναι ***διαιρέτης*** ή ***παράγοντας*** του α ή ότι ο α ***διαιρείται με τον*** β ή ότι ο α είναι ***πολλαπλάσιο του*** β ($\alpha = \pi o\lambda\beta$).

Ισχύουν τα εξής :

- $\pm 1 \mid \alpha,\ \forall \alpha \in Z^*$.
- $\pm \alpha \mid \alpha,\ \forall \alpha \in Z^*$.
- $\beta \mid 0,\ \forall \beta \in Z^*$.
- Αν $\beta \mid \alpha$, τότε $\kappa\beta \mid \kappa\alpha,\ \forall \kappa \in Z^*$.
- Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \alpha$, τότε ή $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.
- Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid \gamma$.

- Αν $\alpha \mid \beta$, τότε $\alpha \mid \lambda\beta$, όπου λ ακέραιος.
- Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\beta+\gamma)$.
- Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.
- Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\kappa\beta+\lambda\gamma)$, $\forall$ κ και $\lambda \in Z^*$.

Ο ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

Ένας ακέραιος δ λέγεται ***κοινός διαιρέτης*** των ακεραίων α και β, όταν είναι διαιρέτης και του α και του β. Ορίζουμε ως ***μέγιστο κοινό διαιρέτη (ΜΚΔ)*** δύο ακεραίων α και β, από τους οποίους ένας τουλάχιστον είναι διάφορος του μηδενός, και τον συμβολίζουμε με ***(α, β)***, τον μεγαλύτερο από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες τους.

Ισχύουν τα εξής :

$\delta \mid \alpha$ και $\delta \mid \beta$
Αν $x \mid \alpha$ και $x \mid \beta$, τότε $x \leq \delta$
$(\alpha, \beta) = (\lvert\alpha\rvert, \lvert\beta\rvert)$
$(\alpha, \alpha) = \alpha$
$(\alpha, 0) = \alpha$
$(\alpha, 1) = 1$
Αν $\beta \mid \alpha$, τότε $(\alpha, \beta) = \beta$
Αν $(\alpha, \beta) = 1$, τότε α και β πρώτοι μεταξύ τους

Για να βρούμε τον ΜΚΔ μεγάλων ακεραίων αριθμών, χρησιμοποιούμε τον ***ευκλείδειο αλγόριθμο***, όπου κάνουμε διαδοχικές ακέραιες διαιρέσεις. Από τη διαίρεση των α και β προκύπτει ένα υπόλοιπο υ_1, μετά διαιρούμε τα β και υ_1, οπότε προκύπτει ένα υπόλοιπο υ_2, μετά διαιρούμε τα υ_1 και υ_2 κοκ. Ο ΜΚΔ είναι το ***τελευταίο θετικό υπόλοιπο*** των παραπάνω αλγοριθμικών διαιρέσεων.

Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί και υ είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσής τους, τότε ισχύει :

$$\boxed{(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon)}$$

Αποδεικνύεται ότι αν $\delta = (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχουν ακέραιοι κ και λ, ώστε να ισχύει :

$$\boxed{\delta = \kappa\alpha + \lambda\beta}$$

Ισχύουν τα εξής :

- Δύο ακέραιοι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους, αν και μόνο αν υπάρχουν ακέραιοι κ και λ, ώστε να ισχύει : κα + λβ =1.
- Αν διαιρέσουμε δύο ακεραίους με τον ΜΚΔ τους, τότε προκύπτουν αριθμοί που είναι πρώτοι μεταξύ τους.
- Οι κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων είναι οι διαιρέτες του μέγιστου κοινού διαιρέτη τους.
- Αν ένας ακέραιος διαιρεί το γινόμενο δύο ακεραίων και είναι πρώτος προς τον έναν, τότε διαιρεί τον άλλον.
- Ο ΜΚΔ τριών ή περισσότερων ακεραίων δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε δύο από αυτούς με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη τους.

ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Ένας ακέραιος γ λέγεται ***κοινό πολλαπλάσιο*** των ακεραίων α και β, διαφορετικών από το μηδέν, όταν είναι πολλαπλάσιο και του α και του β. Ορίζουμε ως ***ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)*** δύο ακεραίων α και β, οι οποίοι είναι διάφοροι του μηδενός, και το συμβολίζουμε με ***[α, β]***, το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσια των α και β.

Ισχύουν τα εξής :

$$\varepsilon = [\alpha, \beta]$$
Αν x=πολα και x=πολβ,
τότε $\varepsilon \leq x$
$$[\alpha, \beta] = [|\alpha|, |\beta|]$$
$$(\alpha, \beta) \cdot [\alpha, \beta] = \alpha \cdot \beta$$
$$[\alpha, 1] = \alpha$$
Αν $\beta \mid \alpha$, τότε $[\alpha, \beta] = \alpha$

- Το ΕΚΠ δύο πρώτων μεταξύ τους ακεραίων είναι το γινόμενο των απολύτων τιμών τους.
- Το ΕΚΠ δύο ακεραίων διαιρεί κάθε άλλο κοινό πολλαπλάσιό τους.
- Τα κοινά πολλαπλάσια δύο ακεραίων είναι τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ.
- Το ΕΚΠ τριών ή περισσότερων ακεραίων δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε δύο από αυτούς με το ΕΚΠ τους.

ΟΙ ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Κάθε ακέραιος αριθμός διάφορος του μηδέν, του 1 και του –1 λέγεται ***πρώτος αριθμός*** αν οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του είναι ο 1 και η απόλυτη τιμή του αριθμού. ΄Ενας ακέραιος αριθμός που δεν είναι πρώτος, λέγεται ***σύνθετος***.

Οι αριθμοί 1 και –1 δεν χαρακτηρίζονται ούτε ως πρώτοι ούτε ως σύνθετοι. Ο 2 είναι ο μοναδικός άρτιος αριθμός που είναι πρώτος καθώς όλοι οι άλλοι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί.

Αν έχουμε έναν θετικό αριθμό α, για να βρούμε αν είναι πρώτος ή σύνθετος, μπορούμε να κάνουμε διαδοχικές διαιρέσεις με τους ακεραίους από το 2 έως το α–1. Αν κανένας αριθμός δεν διαιρεί τον α, τότε ο α είναι πρώτος, αλλιώς είναι σύνθετος.

Ισχύουν τα εξής :

- Κάθε θετικός ακέραιος αριθμός > 1 έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη.
- Αν α>1 είναι ένας σύνθετος ακέραιος, τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον πρώτος αριθμός p, τέτοιος ώστε να ισχύει $p \mid \alpha$ και $p \leq \sqrt{\alpha}$. Αυτό είναι σημαντικό καθώς έτσι είναι αρκετό να ελέγχουμε τους αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι με $\sqrt{\alpha}$ προκειμένου να διαπιστώσουμε αν ένας αριθμός α είναι πρώτος.
- Υπάρχουν άπειροι θετικοί πρώτοι αριθμοί.
- Αν ένας πρώτος αριθμός διαιρεί ένα γινόμενο ακεραίων, τότε διαιρεί έναν τουλάχιστον από τους ακεραίους αυτούς.
- Κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων παραγόντων, όπου κάποιοι πρώτοι παράγοντες μπορεί να είναι υψωμένοι σε δύναμη. Η μορφή αυτή στην οποία αναγράφεται ένας θετικός ακέραιος ως γινόμενο πρώτων παραγόντων αποκαλείται ***κανονική μορφή*** του αριθμού.
- Ο ΜΚΔ θετικών ακεραίων οι οποίοι είναι γραμμένοι σε κανονική μορφή, είναι ίσος με το γινόμενο των κοινών τους παραγόντων, όπου ο κάθε παράγοντας είναι υψωμένος στον μικρότερο εμφανιζόμενο εκθέτη.
- Το ΕΚΠ θετικών ακεραίων οι οποίοι είναι γραμμένοι σε κανονική μορφή, είναι ίσο με το γινόμενο των κοινών και μη κοινών τους παραγόντων, όπου ο κάθε παράγοντας είναι υψωμένος στον μεγαλύτερο εμφανιζόμενο εκθέτη.

Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Γραμμική διοφαντική εξίσωση καλείται μια εξίσωση της μορφής αx + βy = γ, όπου α, β και γ είναι ακέραιοι αριθμοί με α ≠ 0 και β ≠ 0. Αναζητούμε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης αυτής, δηλαδή τα ζευγάρια των ακεραίων αριθμών (x, y) που την επαληθεύουν.

Ισχύει το εξής :

Η γραμμική διοφαντική εξίσωση αx + βy = γ έχει λύση, αν και μόνο αν ο ΜΚΔ = δ των α και β διαιρεί τον γ. Αν η εξίσωση αυτή έχει μια λύση, την (x_0, y_0), τότε έχει άπειρες το πλήθος λύσεις (x, y), οι οποίες δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

$$\boxed{x = x_0 + \frac{\beta}{\delta}t,\ y = y_o - \frac{\alpha}{\delta}t, t \in Z}$$

Ισχύουν τα εξής :

- Αν οι ακέραιοι α, β, γ έχουν ΜΚΔ δ ≠ 1, τότε η εξίσωση $\frac{\alpha}{\delta}x + \frac{\beta}{\delta}y = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση αx + βy = γ.
- Αν οι α, β, γ είναι πρώτοι μεταξύ τους και οι α και β έχουν κοινό διαιρέτη δ ≠ 1, τότε η αx + βy = γ δεν έχει καμία ακέραια λύση.
- Αν οι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η εξίσωση αx + βy = γ έχει ακέραια λύση.
- Αν η εξίσωση αx + βy = γ έχει μια ακέραια λύση, την (x_0, y_0), τότε θα έχει και άλλες άπειρες το πλήθος λύσεις, της μορφής $(x_0 - \beta\kappa, y_0 + \alpha\kappa)$ ή της μορφής $(x_0 + \beta\kappa, y_0 - \alpha\kappa)$ όπου $\kappa \in Z$, και μόνο αυτές.

ΟΙ ΙΣΟΫΠΟΛΟΙΠΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Δύο ακέραιοι αριθμοί α και β λέγονται ***ισοϋπόλοιποι με μέτρο m***, όταν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός m, ώστε οι δύο αριθμοί διαιρούμενοι με τον m να αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Γράφουμε το εξής :

$$\boxed{\alpha = \beta (\bmod m)}$$

Ισχύει το εξής :

$$\boxed{\alpha = \upsilon (\bmod m), \text{ όπου } \alpha = \pi . \mathrm{m} + \upsilon}$$

Ισχύει :

$$\boxed{\alpha = \beta (\bmod m) \Leftrightarrow \mathrm{m} \mid (\alpha - \beta)}$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα :

Αν $\alpha = \beta(\bmod m)$ και $\gamma = \delta(\bmod m)$, τότε :

- $\alpha + \gamma = \beta + \delta(\bmod m)$
- $\alpha - \gamma = \beta - \delta(\bmod m)$
- $\alpha.\gamma = \beta.\delta(\bmod m)$

Αν $\alpha = \beta(\bmod m)$, τότε $\forall \gamma \in Z$:

- $\alpha + \gamma = \beta + \gamma(\bmod m)$
- $\alpha.\gamma = \beta.\gamma(\bmod m)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν ο α είναι ακέραιος, τότε είναι ακέραιος και ο $\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}$.
2. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός.
3. Να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου μπορεί να γραφεί στη μορφή $8\lambda+1$, όπου $\lambda\in Z$.
4. Να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο ενός ακεραίου α μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha^2=3\kappa$, όπου $\kappa \in Z$ ή τη μορφή $\alpha^2=3\kappa+1$, όπου $\kappa \in Z$. *(Υπ. Θέτουμε $\alpha^2=(3\pi+\upsilon)^2$, όπου $\upsilon=0$ ή 1 ή 2).*
5. Αν οι α, β και γ είναι περιττοί ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.
6. Να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο ενός άρτιου αριθμού είναι της μορφής $\alpha^2=4\lambda$, όπου $\lambda\in Z$ και το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι της μορφής $\alpha^2=4\lambda+1$, όπου $\lambda\in Z$.
7. Να αποδειχθεί ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος αριθμός p για τον οποίο ισχύει $3p + 1 = \nu^2$, όπου $\nu\in N^*$, είναι ο 5.
8. Να αποδειχθεί ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος αριθμός p που μπορεί να πάρει την μορφή $p = \nu^3 - 1$, $\nu\in N^*$, είναι ο 7.
9. Να αποδειχθεί ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος αριθμός p που μπορεί να πάρει την μορφή $p = \nu^3 + 1$, $\nu\in N^*$, είναι ο 2.
10. Αν α και β είναι δύο θετικοί περιττοί ακέραιοι >1, τότε να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος αριθμος $\alpha^2 + \beta^2$ είναι σύνθετος.
11. Αν $\alpha, \beta, \mu, \nu \in N^*$ και $(\alpha, \beta) = 1$, τότε να αποδειχθεί ότι $(\alpha^\mu, \beta^\nu) = 1$.
12. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\nu^2 + \nu+1$, όπου $\nu\in N$, είναι πρώτος.
13. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\nu^2 - \nu+1$, όπου $\nu\in N$, είναι πρώτος.
14. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x + 3y = 5$.
15. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $6x - 4y = 8$.
16. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $5x - 3y = 7$.
17. Να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος $3\alpha - 1$, όπου $\alpha\in Z$, δεν είναι ποτέ τετράγνωο ακεραίου.
18. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha\in Z$, ισχύει : $\alpha^3 = \alpha(\text{mod}6)$.
19. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha\in Z$, ισχύει : $\alpha^5 = \alpha(\text{mod}10)$.
20. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα $\nu\geq 2$ διαδοχικών περιττών φυσικών αριθμών είναι σύνθετος αριθμός.
21. Αν $\alpha, \beta \in N^*$, να αποδειχθεί ότι $(\alpha^2, \beta^2) = (\alpha, \beta)^2$.
22. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3x + 5y = -12$.
23. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $13x + 21y = 91$.
24. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $-x + 4y = 1$.
25. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $40x + 51y = 121$.
26. Να βρεθούν οι ακέραιες και θετικές τιμές του x, ώστε να είναι ακέραια και θετική η παρακάτω παράσταση : $\frac{7x-15}{3}$.

27. Να βρεθούν οι ακέραιες και θετικές τιμές του x, ώστε να είναι ακέραια και θετική η παρακάτω παράσταση : $\frac{133-2x}{3}$.
28. Να βρεθούν οι ακέραιες και θετικές τιμές του x, ώστε να είναι ακέραια και θετική η παρακάτω παράσταση : $\frac{1053-31x}{14}$.
29. Να βρεθεί διψήφιος αριθμός ώστε το ένα τρίτο της διαφοράς του ψηφίου των δεκάδων από τον αριθμό να είναι ίσο με το διπλάσιο του ψηφίου των μονάδων αυξημένο κατά 5. *(Απ. 56)*.
30. Να βρεθεί τριψήφιος αριθμός του οποίου τα ψηφία έχουν άθροισμα 7 και ο αριθμός δεν αλλάζει αν εναλλαγούν τα ψηφία των εκατοντάδων και των μονάδων. *(Απ. 313, 232, 151)*.