ΣΕΙΡΕΣ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

Ένα άθροισμα της μορφής $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$ το παριστάνουμε για συντομία με το σύμβολο $\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ και διαβάζουμε *«άθροισμα των αριθμών α_k από k = 1 μέχρι ν»*.

Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε :

$$\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \alpha_1, \text{ αν } \nu = 1 \text{ και } \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu \text{ αν } \nu \geq 2.$$

Μερικά αξιοσημείωτα αθροίσματα που πρέπει να γνωρίζουμε είναι τα εξής :

$$\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + \nu = \sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$\Sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 = \sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

$$\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + \nu^3 = \sum_{k=1}^{\nu} k^3 = \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{\nu} k\right)^2$$

$$\Sigma = 1 + 3 + 5 + \dots + 2\nu - 1 = \sum_{k=1}^{\nu} (2k - 1) = \nu^2$$

Ισχύουν τα εξής :

- $\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\rho} \alpha_k + \sum_{k=\rho+1}^{\nu} \alpha_k$
- $\sum_{k=1}^{\nu} (\xi.\alpha_k + \eta.\beta_k) = \xi.\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k + \eta.\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ονομάζουμε ***σειρά πραγματικών αριθμών*** και την συμβολίζουμε με $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$ ή και με $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_\nu$ και διαβάζουμε άθροισμα των α_ν από ν = 1 έως άπειρο, το διατεταγμένο ζεύγος $((\alpha_\nu), (\sigma_\nu))$, όπου (α_ν) είναι η ακολουθία των πραγματικών αριθμών και $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$, ν = 1, 2, 3, ...

Κάθε όρος της ακολουθίας (α_ν) λέγεται ***όρος*** της σειράς, ενώ κάθε όρος της ακολουθίας (σ_ν) λέγεται ***μερικό άθροισμα*** ή ***τμήμα*** της σειράς. Ο όρος α_ν, τάξης ν, της ακολουθίας (α_ν) λέγεται ***νιοστός*** ή ***γενικός όρος*** της σειράς και ο όρος σ_ν, τάξης ν, της ακολουθίας (σ_ν) λέγεται ***νιοστό μερικό άθροισμα*** της σειράς. Η ακολουθία (σ_ν) μπορεί να καθορισθεί αν είναι γνωστή η ακολουθία (α_ν) αλλά και η ακολουθία (α_ν) μπορεί να καθορισθεί αν είναι γνωστή η ακολουθία (σ_ν).

Παραδείγματα μερικών γνωστών σειρών :

- Η σειρά των φυσικών αριθμών : $\sigma_\nu = 1+2+3+\ldots+\nu = \sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$
- Γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο το α και λόγο $\omega \neq 1$:
  $\sigma_\nu = \alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots+\alpha\omega^\nu = \sum_{k=0}^{\nu}\alpha\omega^k = \alpha\frac{(\omega^{\nu+1}-1)}{\omega-1}$
- Αριθμητική σειρά με πρώτο όρο το α και λόγο ω :
  $\sigma_\nu=\alpha+(\alpha+\omega)+(\alpha+2\omega)+\ldots+[\alpha+(\nu-1)\omega]=\sum_{k=0}^{\nu}(\alpha+k\omega) = \frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2}.\nu$
- Αρμονική σειρά με γενικό όρο το $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$: $\sigma_\nu = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ

Θα λέμε ότι μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό σ και θα γράφουμε $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \sigma$, τότε και μόνο τότε, αν η ακολουθία (σ_ν) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό σ.

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \sigma \Leftrightarrow \lim \sigma_\nu = \lim(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu) = \lim\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k = \sigma}$$

Ο πραγματικός αριθμός σ λέγεται ***άθροισμα*** της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$.

Δηλαδή άθροισμα μιας συγκλίνουσας σειράς ονομάζεται ο αριθμός στον οποίο τείνει το νιοστό μερικό άθροισμά της.

Μια σειρά πραγματικών αριθμών μπορεί είτε να ***συγκλίνει σ' έναν πραγματικό αριθμό*** (να έχει άθροισμα) ή να ***συγκλίνει κατ' εκδοχή***, δηλαδή να απειρίζεται θετικά (τείνει στο $+\infty$) ή αρνητικά (τείνει στο $-\infty$), ή να ***αποκλίνει*** ή ***κυμαίνεται*** *(ταλαντεύεται)*.

Ακολουθούν παραδείγματα :

- Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}$ συγκλίνει στον αριθμό 1.
- Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ απειρίζεται θετικά.
- Η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu}$ απειρίζεται θετικά.
- Η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty}-2^{\nu}$ απειρίζεται αρνητικά.
- Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}$ αποκλίνει.

ΜΕΛΕΤΗ ΣΕΙΡΩΝ

Μια σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν ***αριθμητική πρόοδο***, συγκλίνει κατ' εκδοχή και πιο συγκεκριμένα απειρίζεται θετικά αν η αριθμητική πρόοδος είναι αύξουσα (ω > 0) και απειρίζεται αρνητικά αν η αριθμητική πρόοδος είναι φθίνουσα (ω < 0).

Μια σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν ***γεωμετρική πρόοδο***, συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $\frac{\alpha}{1-\omega}$ αν η γεωμετρική πρόοδος είναι απολύτως φθίνουσα ($|\omega|<1$), απειρίζεται θετικά (τείνει στο $+\infty$) αν ω ≥ 1 και α > 0, απειρίζεται αρνητικά (τείνει στο $-\infty$) αν ω ≥ 1 και α < 0, ενώ αποκλίνει αν ω ≤ –1.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΕΙΡΩΝ

- Αν μια σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει σ' έναν πραγματικό αριθμό, τότε ισχύει : $\lim\alpha_\nu = 0$. Το αντίθετο δεν ισχύει πάντοτε.
- Αν $\lim\alpha_\nu \neq 0$, τότε δεν συγκλίνει η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$. Άρα μπορούμε να προχωρήσουμε στη μελέτη της σύγκλισης μιας σειράς μόνο εφόσον ο γενικός της όρος συγκλίνει στο μηδέν.
- Αν μια σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει σ' έναν πραγματικό αριθμό, τότε είναι φραγμένη η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$. Το αντίθετο δεν ισχύει πάντοτε.
- Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \alpha$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu = \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, τότε ισχύει :

  $$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \xi\alpha + \eta\beta, \text{ όπου } \xi, \eta \in \mathrm{R},$$
- Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει στο R και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ δεν συγκλίνει στο R, τότε και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ δεν συγκλίνει στο R.
- Αν μια σειρά συγκλίνει στο R και έχει άθροισμα α, τότε και η σειρά που προκύπτει απ' αυτήν αν παραλείψουμε τους ρ πρώτους όρους της, συγκλίνει στο R αλλά το άθροισμά της είναι ο αριθμός $\alpha - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\rho)$.
- Αν μια σειρά με όρους μη αρνητικούς συγκλίνει στο R, τότε η ακολουθία (σ_ν) είναι φραγμένη στο R και αντιστρόφως.
- Αν μια σειρά με όρους μη αρνητικούς απειρίζεται θετικά, τότε η ακολουθία (σ_ν) δεν είναι φραγμένη στο R και αντιστρόφως.
- Κάθε σειρά με όρους μη αρνητικούς ή θα συγκλίνει στο R ή θα απειρίζεται θετικά.
- Αν για δύο ακολουθίες ισχύει $0 \leq \alpha_\nu \leq \beta_\nu$, $\forall \nu \in \mathrm{N}$, τότε αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ συγκλίνει στο R, θα συγκλίνει στο R και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$.
- Αν για δύο ακολουθίες ισχύει $0 \leq \alpha_\nu \leq \beta_\nu$, $\forall \nu \in \mathrm{N}$, τότε αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ απειρίζεται θετικά, θα απειρίζεται θετικά και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$.

- Αν για δύο ακολουθίες με θετικούς όρους ισχύει $\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 1$, όπου 0 < l < $+\infty$, τότε αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει στο R, θα συγκλίνει στο R και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ και αντιστρόφως.
- Αν για δύο ακολουθίες με θετικούς όρους ισχύει $\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 1$, όπου 0 < l < $+\infty$, τότε αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ απειρίζεται θετικά, θα απειρίζεται θετικά και η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ και αντιστρόφως.
- Αν μια σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα στο R, τότε είναι και απλώς συγκλίνουσα. Το αντίθετο δεν ισχύει πάντοτε.
- Για την αρμονική σειρά ρ-τάξης ισχύει : $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\rho}} = +\infty$, αν ρ ≤ 1.
- Για την αρμονική σειρά ρ-τάξης ισχύει : $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\rho}}$ συγκλίνει στο R, αν ρ > 1.