ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Τρεις κυρίως είναι οι βασικές έννοιες της Θεωρίας των Πιθανοτήτων : η έννοια του πειράματος τύχης, η έννοια του απλού συμβάντος (γεγονότος) και η έννοια του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης.

Πείραμα τύχης *(random experiment)* αποκαλείται ένα πείραμα για το οποίο δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του αν και αυτό μπορεί να επαναλαμβάνεται πολλές φορές και κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Τέτοια πειράματα είναι για παράδειγμα η ρίψη ενός νομίσματος ή ενός ζαριού, οι κληρώσεις του ΟΠΑΠ κλπ.

Τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης τα λέμε ***απλά συμβάντα*** ή ***στοιχειώδη γεγονότα*** και τα παριστάνουμε συνήθως με ω_1, ω_2, ..., ω_κ κλπ. Αυτά αποτελούν και τις δυνατές περιπτώσεις ενός πειράματος τύχης.

Δειγματικός χώρος *(sample space)* ενός πειράματος τύχης αποκαλείται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων (δυνατών περιπτώσεων) που μπορούν να συμβούν σ' ένα πείραμα τύχης και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Οπότε, αν ω_1, ω_2, ..., ω_κ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης (λέγονται και ***εξαγόμενα*** του πειράματος), τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το παρακάτω σύνολο :

$$\boxed{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}}$$

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός νομίσματος, ο δειγματικός χώρος είναι Ω = {Κ, Γ}, όπου Κ = «κορώνα» και Γ = «γράμματα», ενώ στη ρίψη ενός ζαριού, ο δειγματικός χώρος είναι Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Σ' ένα πείραμα τύχης μπορούμε να αντιστοιχίσουμε πολλούς δειγματικούς χώρους, που η μορφή τους εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος που μελετάμε. Κάθε στοιχείο του Ω είναι ένα από τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης κάθε δοκιμή του πειράματος τύχης έχει ως αποτέλεσμα ένα και μοναδικό στοιχείο του συνόλου Ω.

Ενδεχόμενο *(event)* ή ***συμβάν*** ή ***γεγονός*** αποκαλείται το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα από ένα πείραμα τύχης. Ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω και λέγεται ***απλό*** ή ***στοιχειώδες ενδεχόμενο*** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και ***σύνθετο ενδεχόμενο*** όταν έχει περισσότερα από ένα στοιχεία. Το ίδιο το σύνολο Ω λέγεται ***βέβαιο ενδεχόμενο***, ενώ το κενό σύνολο ∅ λέγεται ***αδύνατο ενδεχόμενο***. Το ***πλήθος*** των στοιχείων ενός ενδεχομένου Α συμβολίζεται με $N(A)$. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε μεταξύ τους μπορούν να γίνουν οι παρακάτω πράξεις ώστε να προκύψουν νέα ενδεχόμενα :

- Το ενδεχόμενο $A \cap B$ (Α τομή Β) ή (Α και Β), που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται και το Α και το Β ταυτόχρονα.
- Το ενδεχόμενο $A \cup B$ (Α ένωση Β) ή (Α ή Β), που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.
- Το ενδεχόμενο Α' (όχι Α) ή (συμπληρωματικό του Α) ή (αντίθετο του Α), που πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.
- Το ενδεχόμενο Α – Β (διαφορά του Β από το Α), που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β. Ισχύει : $A - B = A \cap B'$.

ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ***ασυμβίβαστα*** όταν ισχύει $A \cap B = \varnothing$. Τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται και ***ξένα μεταξύ τους*** ή ***αμοιβαίως αποκλειόμενα*** και η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου, δηλαδή δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα. Τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα αντιστοιχούν σε υποσύνολα ενός δειγματικού χώρου που δεν έχουν κοινά ενδεχόμενα (η τομή τους είναι το κενό σύνολο).

Τέτοια παραδείγματα αποτελούν στην ρίψη ενός νομίσματος τα ενδεχόμενα Α = {2, 4, 6} και Β = {1, 3, 5} ή τα ενδεχόμενα Α = {1, 2, 3} και Β = {4, 5, 6}.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Επειδή για ένα ενδεχόμενο Α ενός πειράματος τύχης δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για το αποτέλεσμά του, αντιστοιχούμε σε κάθε ενδεχόμενο Α έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της «προσδοκίας» με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του, και τον αριθμό αυτόν τον ονομάζουμε ***Πιθανότητα*** του Α και τον συμβολίζουμε με *P(A)*.

Το μεγάλο πρόβλημα είναι τώρα να μπορέσουμε να βρούμε έναν τρόπο ώστε σε κάθε ενδεχόμενο Α ενός πειράματος τύχης να αντιστοιχίζουμε την πιθανότητά του.

Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος τύχης, ένα ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ λέγεται ***σχετική συχνότητα*** του Α και συμβολίζεται με f_A. Αποδεικνύεται ότι καθώς ο αριθμός των δοκιμών ενός πειράματος τύχης επαναλαμβάνεται απεριόριστα, τότε οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων του πειράματος αυτού σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς.

Για παράδειγμα, αν ρίξουμε πάρα πολλές φορές ένα ζάρι, τότε η σχετική συχνότητα εμφάνισης του κάθε αριθμού από το 1 έως το 6, θα πλησιάζει οριακά στην τιμή $\frac{1}{6}$. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο αποκαλείται ***στατιστική ομαλότητα*** ή ***νόμος των μεγάλων αριθμών***.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Ορίζουμε ως ***πιθανότητα*** ενός ενδεχομένου Α σ' ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα, τον παρακάτω αριθμό :

$$\boxed{P(A) = \frac{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma \, E\upsilon\nu o\ddot{\iota}\kappa\acute{\omega}\nu \, \Pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu}{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma \, \Delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omega}\nu \, \Pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu} = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)}}$$

Από τον προηγούμενο ορισμό έχουμε :

$$\boxed{P(\Omega) = \frac{\mathrm{N}(\Omega)}{\mathrm{N}(\Omega)} = 1}$$

$$\boxed{P(\varnothing) = \frac{0}{\mathrm{N}(\Omega)} = 0}$$

Επίσης, για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει προφανώς $0 \le P(A) \le 1$.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Ο προηγούμενος ορισμός ισχύει για απλά ενδεχόμενα που είναι ισοπίθανα. Στις περιπτώσεις των πειραμάτων τύχης όπου ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας :

Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, τότε σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που συμβολίζεται με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω :

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1$

Ο αριθμός $P(\omega_i)$ αποκαλείται ***πιθανότητα*** του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$, ενώ ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\} \neq \varnothing$, ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\kappa)$. Ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$, ορίζεται ο αριθμός $P(\varnothing) = 0$. Ισχύει $P(\Omega) = 1$.

Στην πράξη, ιδιαίτερα όταν δεν ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α λαμβάνουμε το όριο της σχετικής του συχνότητας.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

- Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ***ασυμβίβαστα*** μεταξύ τους, δηλαδή αν δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα, τότε η πιθανότητα να συμβεί ή το ένα ή το άλλο (ένωση συνόλων) είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων τους, δηλαδή έχουμε :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή και ως ***απλός προσθετικός νόμος*** *(simply additive law)* και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα που είναι ανά δύο ασυμβίβαστα μεταξύ τους :

$$\boxed{P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)}$$

- Για δύο ***συμπληρωματικά*** ενδεχόμενα Α και Α' ισχύει :

$$\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$$

- Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου, όχι κατ' ανάγκη ασυμβίβαστα μεταξύ τους, ισχύει :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή και ως ***προσθετικός νόμος*** *(additive law)* και μας λέει με απλά λόγια ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου, η πιθανότητα να συμβεί ***ή το ένα ή το άλλο*** *(ένωση συνόλων)* είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων τους ελαττωμένο κατά την πιθανότητα τού να συμβούν και τα δύο ταυτόχρονα (τομή συνόλων).

Με βάση την παραπάνω ιδιότητα, μπορούμε να βρούμε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ***ένα και μόνο ένα*** από τα Α και Β είναι ίση με :

$$\boxed{P(A - B) \cup P(B - A) = P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)}$$

- Για τρία ενδεχόμενα Α, Β και Γ ενός δειγματικού χώρου ισχύει :

$$\boxed{P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(A \cap B)-P(A \cap \Gamma)-P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)}$$

- Αν $A \subseteq B$, τότε ισχύει $P(A) \leq P(B)$.
- Αν $A \subset B$, τότε ισχύει $P(A) < P(B)$.
- Αν $A \subset B$, τότε ισχύει $P(A \cap B) = P(A)$.
- $A \cup A' = \Omega$
- $A \cap A' = \varnothing$
- $(A')' = A$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

- Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου, όχι κατ' ανάγκη ασυμβίβαστα μεταξύ τους, ισχύει :

$$\boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Η ιδιότητα αυτή μας λέει με απλά λόγια ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου, η πιθανότητα τού να συμβεί ***το Α αλλά όχι και το Β ταυτόχρονα*** *(διαφορά συνόλων)* είναι ίση με την πιθανότητα του Α ελαττωμένη κατά την πιθανότητα τού να συμβούν και τα δύο ταυτόχρονα (τομή συνόλων).

- Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου, όχι κατ' ανάγκη ασυμβίβαστα μεταξύ τους, ισχύει :

$$\boxed{P(A - B) = P(A \cap B')}$$

Η ιδιότητα αυτή μας λέει με απλά λόγια ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου, η πιθανότητα τού να συμβεί ***το Α αλλά όχι και το Β ταυτόχρονα*** *(διαφορά συνόλων)* είναι ίση με την πιθανότητα τού να συμβεί ταυτόχρονα το Α και το συμπλήρωμα του Β (τομή συνόλων).

- Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου, όχι κατ' ανάγκη ασυμβίβαστα μεταξύ τους, ισχύει :

$$\boxed{P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)}$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω, με P(Β) > 0, ζητήσουμε την πιθανότητα τού να συμβεί το Α με δεδομένο ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το Β, τότε αυτό λέγεται ***δεσμευμένη πιθανότητα του Α με δεδομένο το Β***, συμβολίζεται με P(Α | Β) και ισχύει :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ο παραπάνω τύπος προκύπτει καθώς ο δειγματικός χώρος έχει περιοριστεί τώρα μόνο στο Β και το ενδεχόμενο Α έχει περιοριστεί στην τομή των Α και Β. Η ***δεσμευμένη πιθανότητα του Β με δεδομένο το Α***, με P(Α) > 0, συμβολίζεται με P(Β | Α) και ισχύει :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ισχύει ο ***πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων*** :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A) = P(B).P(A \mid B)$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Δύο ενδεχόμενα Α και Β, με P(Α) > 0 και P(Β) > 0, λέγονται ***ανεξάρτητα***, αν και μόνο αν P(Α | Β) = P(Α) και P(Β | Α) = P(Β). Πρακτικά, δύο ενδεχόμενα Α και Β θεωρούνται ανεξάρτητα αν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει καθόλου την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το άλλο. Δύο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται ***εξαρτημένα***.

Λαμβάνοντας υπόψη και τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων, προκύπτει ότι για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα Α και Β, η πιθανότητα τού να πραγματοποιηθεί ***και το ένα και το άλλο*** *(τομή συνόλων)* είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}).\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Τρία ενδεχόμενα Α, Β και Γ ενός πειράματος τύχης λέγονται ανεξάρτητα μεταξύ τους όταν ισχύει :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{A}).\mathrm{P}(\mathrm{B}).\mathrm{P}(\Gamma)$$

Για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες :

- Αν τα Α και Β είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, τότε θα είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και τα Α και Β’ :

$$\boxed{P(A \cap B') = P(A).P(B')}$$

- Αν τα Α και Β είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, τότε θα είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και τα Α’ και Β :

$$\boxed{P(A' \cap B) = P(A').P(B)}$$

- Αν τα Α και Β είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, τότε θα είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και τα Α’ και Β’ :

$$\boxed{P(A' \cap B') = P(A').P(B')}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος που προκύπτει αν ρίξουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.
2. Σε μια οικογένεια με τρία παιδιά, εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
3. Αν ρίξουμε δύο ζάρια, ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 6 και 6.
4. Αν ρίξουμε δύο ζάρια, ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε διαδοχικούς αριθμούς.
5. Αν σε μια τάξη υπάρχουν 24 αγόρια και 19 κορίτσια και πάρουμε στην τύχη 5 μαθητές της τάξης, να βρεθεί η πιθανότητα να είναι όλα αγόρια.
6. Αν σε μια τάξη υπάρχουν 24 αγόρια και 19 κορίτσια και πάρουμε στην τύχη 5 μαθητές της τάξης, να βρεθεί η πιθανότητα να είναι τα 3 αγόρια και τα 2 κορίτσια.
7. Αν εκλέξουμε στην τύχη έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως το 300, να βρεθεί η πιθανότητα ο αριθμός αυτός να διαιρείται είτε με το 5 είτε με το 6.
8. Να εξεταστεί αν τα παρακάτω ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα : αν ρίξουμε ένα ζάρι, Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και Β είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.
9. Να εξεταστεί αν τα παρακάτω ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα : αν επιλέξουμε έναν φοιτητή, Α είναι το ενδεχόμενο να γνωρίζει την αγγλική γλώσσα και Β είναι το ενδεχόμενο να γνωρίζει την ιταλική γλώσσα.
10. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδειχθεί ότι αν ισχύει $A \subseteq B$, τότε $B' \subseteq A'$.
11. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,2$, τότε να βρεθεί η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β. *(Απ. 0,3)*.
12. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,2$, τότε να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ένα ή και τα δύο μαζί από τα Α και Β. *(Απ. 0,7)*.
13. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,2$, τότε να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα και μόνο ένα από τα Α και Β. *(Απ. 0,5)*.
14. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,5$, τότε να εξεταστεί αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.
15. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,5$, τότε να αποδειχθεί ότι ισχύει $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$.
16. Να βρεθεί η πιθανότητα να εμφανιστούν δύο γράμματα στην ρίψη δύο νομισμάτων.

17. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(A)=\frac{17}{30}$, $P(B)=\frac{7}{15}$ και $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$, τότε να βρεθεί η $P(A\cap B)$.
18. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$, τότε να βρεθεί η P(B).
19. Αν από τους μαθητές ενός σχολείου, το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% μαθαίνει γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες και επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, να βρεθεί η πιθανότητα να μην μαθαίνει καμία από τις γλώσσες αυτές. *(Απ. 10%)*.
20. Σε μια πόλη, το 15% των σπιτιών δεν διαθέτει τηλεόραση, το 40% δεν διαθέτει βίντεο και το 10% ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα σπίτι, να βρεθεί η πιθανότητα να έχει και τηλεόραση και βίντεο. *(Απ. 55%)*.
21. Αν $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{3}{4}$, να βρεθούν οι πιθανότητες P(A) και P(A'). *(Απ.* $\frac{3}{7}$ *και* $\frac{4}{7}$*)*.
22. Αν κάποιος έριξε ένα ζάρι και γνωρίζουμε ότι είναι περιττός αριθμός, ποια είναι η πιθανότητα να είναι το 5;. *(Απ.* $\frac{1}{3}$*)*.
23. Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύει $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(A|B)=\frac{4}{5}$, τότε να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A\cap B)$, $P(B|A)$ και $P(A'\cup B)$. *(Απ.* $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ *και* $\frac{11}{20}$*)*.
24. Αν ισχύουν $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$, $P(B|A)=\frac{1}{4}$ και $P(A)=\frac{2}{3}$, τότε να βρεθεί η $P(B)$. *(Απ.* $\frac{1}{3}$*)*.
25. Αν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές, να βρεθεί η πιθανότητα τού να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη και περιττό αριθμό στη δεύτερη ρίψη. *(Απ.* $\frac{1}{12}$*)*.
26. Αν ρίξουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι, να βρεθεί η πιθανότητα τού να φέρουμε «γράμματα» και τον αριθμό «5». *(Απ.* $\frac{1}{12}$*)*.
27. Αν ρίξουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι, να βρεθεί η πιθανότητα τού να φέρουμε «κορώνα» ή έναν άρτιο αριθμό. *(Απ.* $\frac{3}{4}$*)*.
28. Αν σ' ένα σχολείο, η πιθανότητα να γνωρίζει ένας μαθητής Αγγλικά είναι 30%, η πιθανότητα να γνωρίζει Γερμανικά είναι 15% και η πιθανότητα να γνωρίζει και Αγγλικά και Γερμανικά είναι 10%, να βρε-

θεί η πιθανότητα ένας τυχαίος μαθητής του σχολείου να μην γνωρίζει ούτε Αγγλικά ούτε Γερμανικά. *(Απ. 65%)*.

29. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα και ισχύει $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$, τότε να βρεθούν τα $P(B)$ και $P(A\cup B)$. *(Απ.* $\frac{4}{5}$ *και* $\frac{17}{20}$*)*.

30. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου να αποδειχθεί ότι ισχύει : $P(AIB)+P(A'IB)=1$.

31. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου, να αποδειχθεί ότι ισχύει : P(B) = P(A).P(B | A) + P(A').P(B | A').

32. Αν Α και Β είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα, να αποδειχθεί ότι ισχύει : $P(A\cup B)=1-P(A').P(B')$.

33. Αν για τον δειγματικό χώρο Ω = {α, β, γ} ισχύουν οι ισότητες P(α) = $3\lambda^2$, P(β) = 4λ – 1 και P(γ) = 7λ – 2, να βρεθεί η τιμή του λ. *(Απ.* $\lambda=\frac{1}{3}$*)*.