ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ορισμός

Ονομάζουμε ακέραιο πολυώνυμο του x κάθε έκφραση της μορφής :

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

όπου $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu-2}, \dots, \alpha_1, \alpha_0 \in C$ και $\nu \in N$.

Οι αριθμοί $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu-2}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ αποκαλούνται ***συντελεστές*** του πολυωνύμου και το α_0 αποκαλείται ***σταθερός όρος*** (είναι ο συντελεστής του x^0). Οι εκφράσεις $\alpha_k x^k$, όπου $k \in Z$ και $k \geq 0$, αποκαλούνται ***ακέραια μονώνυμα*** του x και αποτελούν τους *όρους* του πολυωνύμου. Πιο συγκεκριμένα, ο $\alpha_\nu x^\nu$ είναι ο πρώτος όρος και ο α_ν ο πρώτος συντελεστής του πολυωνύμου.

Το σύνολο των ακέραιων πολυωνύμων του x με μιγαδικούς συντελεστές θα το συμβολίζουμε με C[x] και τα στοιχεία του C[x], δηλαδή τα ακέραια πολυώνυμα του x, θα τα συμβολίζουμε με P(x), Q(x), R(x), p(x), Δ(x), Φ(x), δ(x), φ(x), π(x), υ(x) κοκ.

Επειδή το σύνολο C[x] αποτελεί μια ευρύτερη κατηγορία, μπορούμε να έχουμε και τα εξής σύνολα ακέραιων πολυωνύμων :

- R[x], το σύνολο των ακέραιων πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.
- Q[x], το σύνολο των ακέραιων πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές.
- Z[x], το σύνολο των ακέραιων πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

Ισότητα Πολυωνύμων

Δύο πολυώνυμα P(x) και Q(x) θα λέμε ότι είναι ίσα, όταν και μόνο όταν, οι συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x είναι ίσοι. Δηλαδή, αν α_k είναι οι συντελεστές του ενός πολυωνύμου και β_k οι συντελεστές του άλλου πολυωνύμου, όπου $k \in N$, θα έχουμε :

$$\boxed{P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \alpha_k = \beta_k,\ \forall\, k = 0, 1, 2, \dots, \nu}$$

Το Μηδενικό Πολυώνυμο

Μηδενικό πολυώνυμο ονομάζεται το πολυώνυμο του οποίου όλοι οι συντελεστές είναι ίσοι με το μηδέν και συμβολίζεται με 0(x). Δηλαδή, ένα πολυώνυμο P(x) είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο όταν και μόνο όταν :

$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} = ... = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$$

$$\boxed{P(x) = 0(x) \Leftrightarrow \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} = ... = \alpha_1 = \alpha_0 = 0}$$

Βαθμός μη Μηδενικού Πολυωνύμου

Βαθμός ενός ακέραιου μη μηδενικού πολυωνύμου ονομάζεται ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεταβλητής x, της οποίας ο συντελεστής είναι διάφορος του μηδενός. Μπορούμε ισοδύναμα να πούμε ότι βαθμός ενός ακέραιου μη μηδενικού πολυωνύμου ονομάζεται ο δείκτης ν του πρώτου συντελεστή α_ν του πολυωνύμου.

Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό, ενώ τα σταθερά πολυώνυμα $P(x)=\alpha_0$, όπου $\alpha_0 \neq 0$, είναι πολυώνυμα μηδενικού βαθμού.

Πράξεις με Πολυώνυμα

Ανάμεσα στα στοιχεία του C[x], δηλαδή ανάμεσα στα ακέραια πολυώνυμα του x με συντελεστές μιγαδικούς αριθμούς, μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο δύο ακέραιων πολυωνύμων του x, που αποτελεί επίσης ένα ακέραιο πολυώνυμο του x, δηλ. ένα στοιχείο του C[x].

Ονομάζουμε ***άθροισμα*** των ακέραιων πολυωνύμων P(x) και Q(x) του C[x], και το συμβολίζουμε με P(x)+Q(x), το ακέραιο πολυώνυμο που έχει συντελεστή του x^k, όπου k=0, 1, 2, ..., ν, το άθροισμα των συντελεστών του x^k στα δύο πολυώνυμα.

Ονομάζουμε ***αντίθετο*** του ακέραιου πολυωνύμου P(x) του C[x], και το συμβολίζουμε με –P(x), το ακέραιο πολυώνυμο που έχει συντελεστές τους αντίθετους των συντελεστών του f(x).

Ονομάζουμε ***διαφορά*** του ακέραιου πολυωνύμου Q(x) του C[x] από το ακέραιο πολυώνυμο P(x) του C[x], και το συμβολίζουμε με P(x)–Q(x), το ακέραιο πολυώνυμο P(x)+[–Q(x)].

Ονομάζουμε ***γινόμενο ενός αριθμού*** λ επί ενός ακέραιου πολυωνύμου P(x) του C[x], και το συμβολίζουμε με λP(x), το ακέραιο πολυώνυμο που έχει συντελεστές τα γινόμενα του αριθμού λ επί τους αντίστοιχους συντελεστές του P(x).

Ονομάζουμε ***γινόμενο*** των ακέραιων πολυωνύμων P(x) και Q(x) του C[x], και το συμβολίζουμε με P(x).Q(x), το ακέραιο πολυώνυμο που έχει συντελεστή του x^k, όπου $k=0, 1, 2, ..., 2ν$, το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών των δύο πολυωνύμων που έχουν άθροισμα δεικτών ίσο με k. Δηλαδή, ο συντελεστής του x^2 είναι το άθροισμα $α_0β_2 + α_1β_1 + α_2β_0$.

Το μηδενικό πολυώνυμο 0(x) είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης των πολυωνύμων και το σταθερό πολυώνυμο 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού των πολυωνύμων.

Ο βαθμός του αθροίσματος και της διαφοράς δύο ακεραίων πολυωνύμων P(x) και Q(x) είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο βαθμό των δύο πολυωνύμων. Στην περίπτωση της πρόσθεσης, ο βαθμός του αθροίσματος είναι μικρότερος από τον μέγιστο βαθμό των δύο πολυωνύμων, όταν τα δύο πολυώνυμα είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των πρώτων όρων τους είναι αντίθετοι.

Αντίστοιχα, στην περίπτωση της αφαίρεσης, ο βαθμός της διαφοράς είναι μικρότερος από τον μέγιστο βαθμό των δύο πολυωνύμων, όταν τα δύο πολυώνυμα είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των πρώτων όρων τους είναι ίσοι.

Ο βαθμός του γινομένου λP(x) είναι ίσος με τον βαθμό του P(x) και ο βαθμός του γινομένου P(x).Q(x) είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των P(x) και Q(x).

Χρήσιμες είναι και οι επόμενες προτάσεις :

- Αν $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow P(x) - Q(x) = 0(x)$.
- Αν για τα ακέραια πολυώνυμα P(x) και Q(x) ισχύει : $P(x).Q(x) = 0(x)$, τότε ένα τουλάχιστον απ' αυτά θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- Το γινόμενο δύο μη μηδενικών ακέραιων πολυωνύμων δεν μπορεί να είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο.
- Αν $R(x) \neq 0(x)$ και $P(x).R(x) = Q(x).R(x) \Rightarrow P(x) = Q(x)$.

Αριθμητική Τιμή και Ρίζα Πολυωνύμου

Μπορούμε να θεωρήσουμε την έκφραση ενός ακέραιου πολυωνύμου

$$P(x) = α_ν x^ν + α_{ν-1}x^{ν-1} + α_{ν-2}x^{ν-2} + ... + α_1 x + α_0$$

σαν μια συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή το x (πολυωνυμική συνάρτηση).

Η εικόνα P(λ) ενός αριθμού λ, δηλ. η έκφραση

$$α_ν λ^ν + α_{ν-1}λ^{ν-1} + α_{ν-2}λ^{ν-2} + ... + α_1 λ + α_0$$

αποκαλείται αριθμητική τιμή της πολυωνυμικής συνάρτησης για x = λ ή πιο απλά ***αριθμητική τιμή*** του πολυωνύμου P(x) για x = λ.

Ένας αριθμός $\rho \in C$ θα αποκαλείται ***ρίζα*** ενός ακέραιου πολυωνύμου $P(x) \in C[x]$, όταν και μόνο όταν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$ είναι ίση με μηδέν, δηλ. $P(\rho) = 0$.

$$\boxed{\rho \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0}$$

Το σύνολο των ριζών ενός ακέραιου πολυωνύμου $P(x) \in C[x]$ αποκαλείται ***σύνολο αλήθειας*** του πολυωνύμου $P(x)$. Αποδεικνύεται ότι κάθε ακέραιο πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές και με βαθμό $\nu \geq 1$, έχει ν μιγαδικές ρίζες.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Τέλεια Διαίρεση Πολυωνύμων

Αν $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ είναι δύο ακέραια πολυώνυμα του $C[x]$, θα λέμε ότι το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$, και θα γράφουμε $\delta(x)/\Delta(x)$, αν και μόνο αν $\delta(x) \neq 0(x)$ και υπάρχει ένα ακέραιο πολυώνυμο $\pi(x) \in C[x]$, ώστε να ισχύει :

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$$

$$\boxed{\delta(x)/\Delta(x) \Leftrightarrow \delta(x) \neq 0(x) \wedge \exists\ \pi(x) \in C[x] : \Delta(x) = \delta(x)\pi(x)}$$

Μπορούμε να λέμε ότι το $\Delta(x)$ διαιρείται ή είναι διαιρετό από το $\delta(x)$ ή ότι το $\Delta(x)$ είναι πολλαπλάσιο του $\delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι διαιρέτης του $\Delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$ ή τέλος ότι το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$. Σε μια τέλεια διαίρεση πολυωνύμων, το πολυώνυμο $\Delta(x)$ ονομάζεται ***διαιρετέος***, το $\delta(x)$ ***διαιρέτης*** και το $\pi(x)$ ***πηλίκο*** της διαίρεσης $\Delta(x) : \delta(x)$.

Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι το μηδενικό πολυώνυμο διαιρείται από κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο και δίνει πηλίκο μηδέν, αλλά το μηδενικό πολυώνυμο δεν διαιρεί κανένα πολυώνυμο.

Ακολουθούν ορισμένες χρήσιμες παρατηρήσεις – προτάσεις :

- Κάθε πολυώνυμο διαιρείται από κάθε σταθερό αλλά μη μηδενικό πολυώνυμο.
- Κάθε πολυώνυμο διάφορο του μηδενικού διαιρεί τον εαυτό του.
- Ο βαθμός του πηλίκου είναι ίσος με τη διαφορά των βαθμών διαιρετέου και διαιρέτη.
- Αν το πολυώνυμο $\delta(x)$ διαιρεί το πολυώνυμο $\Delta(x)$, τότε ή το $\Delta(x)=0(x)$ ή ο βαθμός του $\Delta(x)$ θα είναι $\geq$ από τον βαθμό του $\delta(x)$.
- Το πηλίκο μιας τέλειας διαίρεσης πολυωνύμων είναι μοναδικό.
- Αν $\delta(x)/\Delta(x)$ και $\Delta(x)/\Phi(x) \Rightarrow \delta(x)/\Phi(x)$.
- Αν $\varphi(x) \neq 0(x) \wedge \delta(x)/\Delta(x) \Leftrightarrow \delta(x)\varphi(x)/\Delta(x)\varphi(x)$.
- Αν $\delta(x)/\Delta(x) \Rightarrow \delta(x)/\Delta(x)\Phi(x)\ \forall\ \Phi(x) \in C[x]$.
- Αν $\delta(x)/\Delta_1(x)$ και $\delta(x)/\Delta_2(x) \Rightarrow \delta(x)/\Delta_1(x) \pm \Delta_2(x)$.
- Αν $\delta_1(x)/\Delta_1(x)$ και $\delta_2(x)/\Delta_2(x) \Rightarrow \delta_1(x)\delta_2(x)/\Delta_1(x)\Delta_2(x)$.
- Αν το $\delta(x)$ διαιρεί καθένα από τα πολυώνυμα $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$, ..., $\Delta_\nu(x)$, τότε το $\delta(x)$ θα διαιρεί και το πολυώνυμο $c_1\Delta_1(x)+c_2\Delta_2(x)+\ldots+c_\nu\Delta_\nu(x)$, όπου $c_1, c_2, \ldots, c_\nu \in C$.
- Αν $\delta(x)/\Delta_1(x) \pm \Delta_2(x)$ και $\delta(x)/\Delta_1(x) \Rightarrow \delta(x)/\Delta_2(x)$.
- Αν $\delta(x)/\Delta_1(x)$ και $\delta(x)/\Delta_2(x) \Rightarrow \delta(x)/\Delta_1(x)\Phi_1(x) \pm \Delta_2(x)\Phi_2(x)$, $\forall\ \Phi_1(x)$, $\Phi_2(x) \in C[x]$.
- Αν το $\delta(x)$ διαιρεί ένα τουλάχιστον από τα πολυώνυμα $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$, ..., $\Delta_\nu(x)$, τότε το $\delta(x)$ θα διαιρεί και το πολυώνυμο $\Delta_1(x)\Delta_2(x)\ldots\Delta_\nu(x)$.
- Αν $\delta(x)/\delta(x) \Rightarrow \delta(x)/[\Delta(x)]^\nu\ \forall\ \nu \in N$.
- Αν $\delta(x)/\Delta(x)$ και $\Delta(x)/\delta(x) \Rightarrow \Delta(x) = c.\delta(x)$, όπου c σταθερά $\neq 0$.

Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι σίγουροι διαιρέτες ενός ακέραιου πολυωνύμου Δ(x) είναι τα πολυώνυμα μηδενικού βαθμού $\neq 0$, το ίδιο το Δ(x) αν Δ(x) $\neq 0$(x), και όλα τα πολυώνυμα της μορφής cΔ(x), όπου $\neq 0$. Οι διαιρέτες αυτοί αποκαλούνται ***προφανείς διαιρέτες*** του Δ(x) και κάθε άλλος διαιρέτης του f(x) αποκαλείται ***γνήσιος διαιρέτης*** του Δ(x).

Ακολουθούν μερικοί χρήσιμοι ορισμοί :

- Ένα πολυώνυμο Δ(x) $\in$ C[x], με βαθμό ν>0, θα αποκαλείται ***ανάγωγο***, αν και μόνο αν έχει μόνο προφανείς διαιρέτες, κάτι αντίστοιχο δηλαδή με τους πρώτους αριθμούς στο σύνολο των ακεραίων. Στο C[x] τα μόνα ανάγωγα πολυώνυμα είναι τα πολυώνυμα πρώτου βαθμού αx + β, με α$\neq 0$, ενώ στο R[x] ανάγωγα πολυώνυμα είναι τα αx + β, με α $\neq 0$ και τα πολυώνυμα δεύτερου βαθμού που έχουν μιγαδικές ρίζες (Δ<0).
- Ένα πολυώνυμο δ(x) $\in$ C[x] θα αποκαλείται ***κοινός διαιρέτης*** των πολυωνύμων P(x), Q(x), αν και μόνο αν, διαιρεί και τα δύο πολυώνυμα P(x), Q(x).
- Ένα πολυώνυμο δ(x) $\in$ C[x] θα αποκαλείται ***μέγιστος κοινός διαιρέτης*** των μη μηδενικών πολυωνύμων P(x), Q(x), αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής :
    - Είναι κοινός διαιρέτης των P(x) και Q(x).
    - Το δ(x) διαιρείται από κάθε άλλο κοινό διαιρέτη των P(x) και Q(x).
    - Ο πρώτος συντελεστής του είναι το 1.
- Ο ΜΚΔ δύο πολυωνύμων, αν υπάρχει, είναι μοναδικός και ακόμη είναι το πολυώνυμο με τον μεγαλύτερο βαθμό ανάμεσα στους κοινούς διαιρέτες των δύο πολυωνύμων.
- Δύο μη μηδενικά πολυώνυμα P(x), Q(x) θα ονομάζονται ***πρώτα μεταξύ τους***, αν και μόνο αν ο ΜΚΔ τους δ(x) είναι ίσος με το σταθερό πολυώνυμο 1.

Αλγοριθμική Διαίρεση Πολυωνύμων

Για δύο ακέραια πολυώνυμα Δ(x) και δ(x) του C[x] με δ(x) $\neq 0$(x), υπάρχει ένα και μόνο ένα ζευγάρι πολυωνύμων π(x) και υ(x) του C[x], έτσι ώστε να ισχύει :

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta(x) = \delta(x).\pi(x) + \upsilon(x)\\ \text{όπου ή } \upsilon(x)=0(x) \text{ ή ο βαθμός } \upsilon(x) < \text{βαθμό } \delta(x)\end{array}}$$

Η παραπάνω σχέση αποκαλείται ***ταυτότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης*** Δ(x) : δ(x). Η εύρεση των π(x) και υ(x) αποκαλείται ***αλγοριθμική ή Ευκλείδια διαίρεση*** του Δ(x) δια του δ(x) και τα πολυώνυμα Δ(x), δ(x), π(x) και υ(x) αποκαλούνται αντίστοιχα *διαιρετέος*, *διαιρέτης*, *αλγοριθμικό* ή ακέραιο πηλίκο ή και απλά *πηλίκο* και *υπόλοιπο* της διαίρεσης Δ(x) : δ(x).

Ακολουθούν ορισμένες χρήσιμες παρατηρήσεις :

- Αν υ(x) = 0(x), η διαίρεση αποκαλείται ***τέλεια***.
- Ο βαθμός του πηλίκου της διαίρεσης δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με τη διαφορά των βαθμών διαιρετέου και διαιρέτη.
- δ(x)/Δ(x) – υ(x), δηλ. ο διαιρέτης διαιρεί το πολυώνυμο της διαφοράς του διαιρετέου μείον το υπόλοιπο.

Και μερικές πολύ χρήσιμες προτάσεις :

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός ακέραιου πολυώνυμου $P(x) \in C[x]$ με το διώνυμο x – α, όπου $\alpha \in C$, είναι το P(α), δηλ. η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για x = α.

$$\boxed{P(x) = (x-\alpha).\pi(x) + P(\alpha)}$$

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός ακέραιου πολυώνυμου $P(x) \in C[x]$ με το διώνυμο αx + β, όπου $\alpha, \beta \in C$ και $\alpha \neq 0$, είναι το $P(-\frac{b}{a})$, δηλ. η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = -\frac{b}{a}$.

$$\boxed{P(x) = (\alpha x + \beta).\pi(x) + P(-\frac{b}{a})}$$

- Το πολυώνυμο $P(x) \in C[x]$ διαιρείται με το διώνυμο x – ρ, όπου $\rho \in C$, αν και μόνο αν, το ρ είναι ρίζα του P(x).

$$\boxed{x-\rho/P(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-\rho).\pi(x)}$$

- Αν $\upsilon_1(x)$ και $\upsilon_2(x)$ είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P_1(x):\delta(x)$ και $P_2(x):\delta(x)$ αντίστοιχα, όπου $\delta(x) \neq 0(x)$, τότε ισχύει :

$$\boxed{\delta(x)/P_1(x) - P_2(x) \Leftrightarrow \upsilon_1(x) = \upsilon_2(x)}$$

- Σε κάθε αλγοριθμική διαίρεση, ο διαιρετέος και το υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον διαιρέτη αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο, δηλ. το ίδιο το υ(x).
- Ένα ακέραιο πολυώνυμο P(x), βαθμού $\geq \nu$, όπου $\nu \in N$, διαιρείται με το $(x-\alpha)^{\nu}$, αν και μόνο αν $P(\alpha)=0$, $P_1(\alpha)=0$, $P_2(\alpha)=0$, ..., $P_{\nu-1}(\alpha)=0$, όπου $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_{\nu-1}(x)$ είναι αντίστοιχα τα πηλίκα των διαιρέσεων : $P(x):(x-\alpha)$, $P_1(x):(x-\alpha)$, ..., $P_{\nu-2}(x):(x-\alpha)$.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ ΣΤΗ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Μέθοδος 1η

Βασίζεται στη γνωστή ιδιότητα ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x–α είναι ίσο με P(α) και ακόμη ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο αx+β είναι ίσο με $P(-\frac{b}{a})$.

Μέθοδος 2η (προσδιοριστέων συντελεστών)

Εφαρμόζεται στην περίπτωση που ο διαιρέτης είναι της μορφής :

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ \dots\ (x-\alpha_\nu)$$

όπου οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε τη βασική ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων και έχουμε :

$$\Delta(x) = \delta(x).\pi(x) + \upsilon(x)$$

Θέτουμε όπου $x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu$ και προκύπτουν έτσι ν σε πλήθος εξισώσεις της μορφής :

$$\begin{aligned}
&\Delta(\alpha_1) = \upsilon(\alpha_1)\\
&\Delta(\alpha_2) = \upsilon(\alpha_2)\\
&\Delta(\alpha_3) = \upsilon(\alpha_3)\\
&\dots\\
&\Delta(\alpha_\nu) = \upsilon(\alpha_\nu)
\end{aligned}$$

Μέθοδος 3η (με χρήση παραγώγων)

Εφαρμόζεται στην περίπτωση που ο διαιρέτης είναι της μορφής :

$$(x-\alpha)^\kappa$$

όπου $\kappa \in N$ και $\kappa > 1$.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε τη βασική ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων και έχουμε :

$$\Delta(x) = (x-\alpha)^\kappa.\pi(x) + \upsilon(x)$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση κ–1 φορές και έτσι προκύπτουν κ σε πλήθος εξισώσεις.

Μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις :

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $(x-\alpha)^2$ είναι ίσο με $P'(\alpha).x + P(\alpha) - \alpha.P'(\alpha)$.
- Για να έχει ένα πολυώνυμο P(x) μια τουλάχιστον διπλή ρίζα α, θα πρέπει $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

Μέθοδος 4η (διαδοχικών διαιρέσεων)

Εφαρμόζεται στην περίπτωση που ο διαιρέτης είναι της μορφής :

$$(x-\alpha)^{\kappa}.(x-\beta)$$

όπου $\kappa \in N$, $\kappa > 1$ και $\alpha \neq \beta$.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε τη βασική ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων Δ(x) και $(x-\alpha)^{\kappa}$ και έχουμε :

$$\Delta(x) = (x-\alpha)^{\kappa}.\pi(x) + \upsilon(x)$$

Κάνουμε μετά τη διαίρεση του πολυωνύμου π(x) με το πολυώνυμο (x–β) και έχουμε :

$$\pi(x) = (x-\beta).\pi_1(x) + \pi(\beta)$$

Αντικαθιστούμε στην προηγούμενη σχέση και έχουμε :

$$\Delta(x) = (x-\alpha)^{\kappa}.(x-\beta).\pi_1(x) + (x-\alpha)^{\kappa}.\pi(\beta) + \upsilon(x)$$

Θέτουμε όπου x = β και βρίσκουμε το π(β).

Μέθοδος 5η (ίσων υπολοίπων)

Βασίζεται στη γνωστή πρόταση ότι αν ένα πολυώνυμο $\delta(x) \neq 0(x)$ και $\delta(x)/P(x)-Q(x)$, τότε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων P(x):δ(x) και Q(x):δ(x) θα είναι ίσα.

Μέθοδος 6η (αντικατάστασης)

Εφαρμόζεται στην περίπτωση που ο διαιρέτης είναι της μορφής :

$$(x^{\kappa}-\alpha)$$

και ο διαιρετέος είναι της μορφής $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0$, όπου $\nu \geq \kappa$.

Προσπαθούμε να γράψουμε τον διαιρετέο σε μια μορφή σαν την :

$$(x^{\kappa})^{\lambda}.p_\lambda(x) + (x^{\kappa})^{\lambda-1}.p_{\lambda-1}(x) + \ldots + (x^{\kappa})^1.p_1(x) + p_0(x)$$

οπότε θέτουμε $x^\nu = y$ και προκύπτει ένα πολυώνυμο ως προς y. Θέτουμε όπου y = α και το πολυώνυμο που θα προκύψει ως προς x θα είναι και το ζητούμενο υπόλοιπο.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Πολυώνυμα με Μιγαδικούς Συντελεστές

Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο $P(x) \in C[x]$ διαιρείται με καθένα από τα διώνυμα $(x - \varrho_1)$, $(x - \varrho_2)$, ..., $(x - \varrho_\nu)$, όπου $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_\nu$ αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, τότε το $P(x)$ θα διαιρείται και με το γινόμενο :

$$(x - \varrho_1)(x - \varrho_2)\dots(x - \varrho_\nu)$$

και αντίστροφα.

Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, βαθμού $\nu \geq 1$, έχει ως ρίζες τους ν διαφορετικούς μεταξύ τους ανά δύο αριθμούς $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_\nu$, τότε θα έχουμε :

$$P(x) = \alpha(x - \varrho_1)(x - \varrho_2)\dots(x - \varrho_\nu)$$

Ο αριθμός $\varrho \in C$ θα αποκαλείται ***ρίζα βαθμού πολλαπλότητας k***, όπου $k \geq 1$, του πολυωνύμου $P(x)$, αν και μόνο αν υπάρχει ένα ακέραιο πολυώνυμο $Q(x)$, ώστε να ισχύει : $P(x) = (x - \varrho)^k Q(x)$ και $Q(\varrho) \neq 0$.

Κάθε ακέραιο πολυώνυμο $P(x) \in C[x]$, βαθμού $\nu \geq 1$, έχει ν το πλήθος ρίζες, ίσες ή διαφορετικές, στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών.

Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, βαθμού $\nu \geq 1$, έχει ως ρίζες τους αριθμούς $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_\varkappa$, με βαθμούς πολλαπλότητας $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\varkappa$ αντίστοιχα, τότε θα έχουμε :

$$P(x) = \alpha(x - \varrho_1)^{\lambda_1}(x - \varrho_2)^{\lambda_2}\dots(x - \varrho_\varkappa)^{\lambda_\varkappa}$$

όπου θα ισχύει : $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\varkappa = \nu$ και $\varkappa \leq \nu$.

Η παραπάνω παράσταση ονομάζεται ανάλυση του πολυωνύμου $P(x)$ σε *γινόμενο πρώτων παραγόντων*.

Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο $P(x)$, βαθμού το πολύ ν, μηδενίζεται για $\nu+1$ διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο τιμές του x, τότε το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Αν δύο ακέραια πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$, είναι και τα δύο βαθμού το πολύ ν, και έχουν τις ίδιες τιμές για $\nu+1$ διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο τιμές του x, τότε $P(x) = Q(x)$.

Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο $P(x)$, βαθμού το πολύ ν, έχει την ίδια αριθμητική τιμή για $\nu+1$ διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο τιμές του x, τότε το $P(x)$ είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

Τύποι του Vieta

Για ένα ακέραιο πολυώνυμο $P(x) = α_ν x^ν + α_{ν-1}x^{ν-1} + α_{ν-2}x^{ν-2} + ... + α_1 x + α_0$, όπου $α_ν \neq 0$, που έχει ως ρίζες τους ν αριθμούς $ρ_1, ρ_2, ..., ρ_ν$, ξέρουμε ότι ισχύει :

$$P(x) = α_ν x^ν + α_{ν-1}x^{ν-1} + α_{ν-2}x^{ν-2} + ... + α_1 x + α_0 = α_ν(x - ρ_1)(x - ρ_2)...(x - ρ_ν)$$

Αν κάνουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέρος και εξισώσουμε τους συντελεστές των ισοβάθμιων όρων, έχουμε τις εξής πολύ χρήσιμες σχέσεις οι οποίες συσχετίζουν τις ρίζες και τους συντελεστές ενός πολυωνύμου και που είναι γνωστές σαν τύποι του Vieta :

$$S_1 = ρ_1 + ρ_2 + ... + ρ_{ν-1} + ρ_ν = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = ρ_1ρ_2 + ρ_1ρ_3 + ... + ρ_1ρ_ν + ρ_2ρ_3 + ... + ρ_2ρ_ν + ... + ρ_{ν-1}ρ_ν = +\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3 = ρ_1ρ_2ρ_3 + ρ_1ρ_2ρ_4 + ... + ρ_1ρ_2ρ_ν + ... + ρ_{ν-2}ρ_{ν-1}ρ_ν = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$... \qquad ... \qquad ...$$

$$S_ν = ρ_1ρ_2ρ_3 \cdots ρ_{ν-1}ρ_ν = (-1)^ν \frac{a_0}{a_n}$$

Πολυώνυμα με Πραγματικούς Συντελεστές

Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x) \in R[x]$, τότε και τα πολυώνυμα $P(x) \pm Q(x)$, $P(x)Q(x)$ αλλά και το πηλίκο και το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης $P(x):Q(x)$ είναι επίσης ακέραια πολυώνυμα με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς.

Αν το ακέραιο πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού $ν \geq 2$, έχει ως ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $α + iβ$, όπου $α, β \in R$ και $β \neq 0$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον συζυγή μιγαδικό $α - iβ$.

Αν το ακέραιο πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού $ν \geq 2k$, όπου $k \in N$, έχει ως πολλαπλή ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $α + iβ$, όπου $α, β \in R$ και $β \neq 0$, με βαθμό πολλαπλότητας k, τότε θα έχει ως πολλαπλή ρίζα και τον συζυγή μιγαδικό $α - iβ$ και με τον ίδιο βαθμό πολλαπλότητας k.

Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές έχει ως ρίζες μιγαδικούς αριθμούς, τότε το πλήθος των μιγαδικών ριζών θα είναι άρτιος αριθμός.

Όλα τα πολυώνυμα περιττού βαθμού που έχουν πραγματικούς συντελεστές έχει σίγουρα έναν τουλάχιστον πραγματικό αριθμό σαν ρίζα.

Ένα πολυώνυμο άρτιου βαθμού που έχει πραγματικούς συντελεστές μπορεί να έχει καμία μιγαδική ρίζα ή όλες τις ρίζες του μιγαδικές ή άρτιο πλήθος μιγαδικών ριζών.

Πολυώνυμα με Ρητούς Συντελεστές

Αν τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) $\in$ Q[x], τότε και τα πολυώνυμα P(x) $\pm$ Q(x), P(x)Q(x) αλλά και το πηλίκο και το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης P(x):Q(x) είναι επίσης ακέραια πολυώνυμα με συντελεστές ρητούς αριθμούς.

Αν το ακέραιο πολυώνυμο P(x) με ρητούς συντελεστές, βαθμού $\nu \geq 2$, έχει ως ρίζα τον αριθμό $\alpha + \sqrt{b}$, όπου α, $\beta \in$ Q και $\sqrt{b} \in$ R–Q, δηλ. το β δεν αποτελεί τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $\alpha - \sqrt{b}$ και μάλιστα με τον ίδιο βαθμό πολλαπλότητας.

Αν το ακέραιο πολυώνυμο P(x) με ρητούς συντελεστές, βαθμού $\nu \geq 2$, έχει ως ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta\sqrt{g}$, όπου α, β, $\gamma \in$ Q και $\sqrt{g} \in$ R–Q, δηλ. το γ δεν αποτελεί τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, και $\beta \neq 0$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $\alpha - \beta\sqrt{g}$ και μάλιστα με τον ίδιο βαθμό πολλαπλότητας.

Πολυώνυμα με Ακέραιους Συντελεστές

Αν τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) $\in$ Z[x], τότε και τα πολυώνυμα P(x) $\pm$ Q(x) και P(x)Q(x) $\in$ Z[x]. Επίσης, αν ο πρώτος συντελεστής του Q(x) είναι ίσος με 1 ή με –1, τότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης P(x):Q(x) είναι επίσης ακέραια πολυώνυμα με συντελεστές ακέραιους αριθμούς.

Αν το ακέραιο πολυώνυμο P(x) με ακέραιους συντελεστές έχει ως ρίζα τον ακέραιο αριθμό $\rho \neq 0$, τότε ο ρ θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 του πολυωνύμου, δηλαδή ρ/α_0.

Αν έχουμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει να αναζητάμε τις ακέραιες ρίζες του, αν φυσικά υπάρχουν, ανάμεσα στους διαιρέτες του σταθερού όρου α_0.

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει πάντα, δηλ. δεν αποτελούν όλοι οι διαιρέτες του σταθερού όρου α_0 ρίζες ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές.

Ισχύει, όμως, το εξής : αν κανένας από τους διαιρέτες του σταθερού όρου α_0 ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές δεν μηδενίζει το πολυώνυμο, τότε αυτό δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Αν το ακέραιο πολυώνυμο P(x) με ακέραιους συντελεστές έχει ως ρίζα τον ρητό αριθμό $\frac{k}{l}$, όπου κ, λ$\in$ Ζ, κ και λ είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους και $\lambda \neq 0$, τότε ο κ θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 του πολυωνύμου και ο λ διαιρέτης του πρώτου συντελεστή α_ν του πολυωνύμου, δηλαδή κ/α_0 και λ/α_ν.

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει πάντα, δηλ. δεν αποτελούν όλοι οι ρητοί αριθμοί της μορφής $\frac{k}{l}$, όπου κ/α_0 και λ/α_ν, ρίζες ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1. Να βρεθούν οι αριθμοί α, β, γ και δ ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = αx^4 + 3x^3+βx^2–γx+δ$ και $Q(x) = 3x^3+(2–β)x^2+(δ+10)x$ να είναι ίσα *(Απ. α=0, β=1, γ=–10, δ=0)*.
2. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (α–5)x^4 + (β+6)x^3 + (2α+β–3γ+δ)x + (δ+5)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο *(Απ. α=5, β=–6, γ=$-\frac{1}{3}$, δ=–5)*.
3. Να βρεθεί ο αριθμός α ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (α^2–4)x^3 + (α^2–5α+6)x + (α–2)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο *(Απ. α=2)*.
4. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ αν ισχύει α+β+γ=27 και η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(a-3)x^2+(b-6)x+(g-2)}{x^2+3x+4}$ είναι σταθερή $\forall x\in R$. Ποια είναι η τιμή της συνάρτησης $f(x)$ σ' αυτή την περίπτωση; *(Απ. α=5, β=12, γ=10, f(x)=2)*.
5. Να βρεθεί ακέραιο πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P(x)\in R[x]$ που να έχει ρίζα τον αριθμό μηδέν και να ισχύει : $P(x+1) – P(x) = x^2+x+1$ *(Απ. $P(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x$)*.
6. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x^2–3x+2$, αν γνωρίζουμε ότι το P(x) διαιρούμενο με το x–1 δίνει υπόλοιπο 11 και διαιρούμενο με το x–2 δίνει υπόλοιπο 15 *(Απ. 4x+7)*.
7. Αν το πολυώνυμο $P(x) = αx^3+x^2+βx+4$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $x^2–5x+6$ δίνει υπόλοιπο $υ(x) = 5x+8$, να βρεθούν τα α και β *(Απ. α= $-\frac{1}{3}$, β=$\frac{19}{3}$)*.
8. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β, ώστε το πολυώνυμο $x^3+αx^2–3βx+4$ να διαιρείται ακριβώς με το πολυώνυμο $x^2–3x+2$ *(Απ. α=–1, β=$\frac{4}{3}$)*.
9. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $(x^2–α^2)$ *(Απ. $\frac{P(a)-P(-a)}{2a}x+\frac{P(a)+P(-a)}{2}$)*.
10. Να βρεθεί το άθροισμα, το γινόμενο και το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών του πολυωνύμου : $3x^3+5x^2–2x+6$ *(Απ. $-\frac{5}{3}$, –2, $\frac{37}{9}$)*.
11. Να βρεθεί το πολυώνυμο τέταρτου βαθμού με ακέραιους συντελεστές, το οποίο να έχει ως ρίζες τους αριθμούς $2+\sqrt{2}$ και –1–3i *(Απ. $P(x) = α(x^4–2x^3+4x^2–36x+20)$, όπου $α\in Z$)*.
12. Αν τα πολυώνυμα $P(x) = (2α+1)x^2+βx+(γ–2)$ και $Q(x) = 3x^2–8x+(α+2)$ έχουν ίδιες αριθμητικές τιμές για τρεις διαφορετικές τιμές του x, να βρεθούν οι αριθμοί α, β, γ *(Απ. α=1, β=–8, γ=5)*.
13. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ακέραιους συντελεστές και οι αριθμητικές τιμές του P(0) και P(1) είναι περιττοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο P(x) δεν μπορεί να έχει ακέραιες ρίζες *(Υπ. Μια πιθανή*

ακέραιη ρίζα ρ θα πρέπει να είναι περιττός αριθμός αλλά και η αριθμητική τιμή P(ρ) θα πρέπει να είναι περιττός αριθμός, δηλ. ≠0, όπερ άτοπο).

14. Για ποιες τιμές των α και β, το πολυώνυμο $αx^3+β$ διαιρείται με το πολυώνυμο $αx+β$; *(Απ. β=0 ή α=β ή α=–β)*.
15. Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $x^5+6x–2$ δεν έχει ακέραιες ρίζες *(Υπ. Ελέγχουμε τις αριθμητικές τιμές του πολυωνύμου για x = 1, –1, 2, –2)*.
16. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε το πολυώνυμο x–1 να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $λ^2x^3+4λx^2–5$ (Απ. λ=1 και λ=–5).
17. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $x^3+4x^2–2x+3$ με το πολυώνυμο x–2 *(Απ. 23)*.
18. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $x^3+4x^2–2x+3$ με το πολυώνυμο 3x+1 *(Απ.* $\frac{110}{27}$*)*.
19. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x^2–2x–3$ όταν είναι γνωστό ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x+1 είναι –4 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x–3 είναι –164 *(Απ. –40x–44)*.
20. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $(x–α)^3$ *(Απ.* $\frac{1}{2}P''(α).x^2 + (P'(α)–α.P''(α)).x + P(α) – P'(α).α + \frac{1}{2}P''(α).α^2$*)*.
21. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $(x–1)^2(x–3)$ όταν είναι γνωστό ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $(x–1)^2$ είναι x+1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x–3 είναι 8 *(Απ.* $x^2–x+2$*)*.
22. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $x^6+4x^5–2x^3+x^2+3$ με το πολυώνυμο $x^3–2$ *(Απ.* $9x^2+3$*)*.