ΠΙΝΑΚΕΣ

Ονομάζουμε ***πίνακα*** ή ***μήτρα*** *(matrix)* του τύπου (μ, ν) ή πίνακα με μ γραμμές και ν στήλες ή πίνακα μ Χ ν πάνω στο σύνολο R και τον παριστάνουμε με $A_{\mu,\nu}$ ή και με Α, μια ορθογώνια διευθέτηση (διάταξη ή και παράταξη) μ Χ ν στοιχείων, α_{ij} (i=1, 2, ..., μ και j = 1, 2, ..., ν) του συνόλου R σε μορφή ορθογωνίου σχήματος με μ γραμμές και ν στήλες, ως εξής :

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας μπορεί να παρασταθεί και ως $A=[\alpha_{ij}]_{\mu,\nu}$ ή και ως $A_{\mu,\nu}=[\alpha_{ij}]$ ή και πιο απλά ως $A=[\alpha_{ij}]$. Οι μ οριζόντιες ν-άδες είναι οι ***γραμμές*** του πίνακα Α και οι ν κατακόρυφες μ-άδες είναι οι ***στήλες*** του πίνακα Α.

Τους πίνακες τους παριστάνουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα. Ένας πίνακας με μ γραμμές και ν στήλες λέγεται ***πίνακας του τύπου (μ, ν)***. Δύο ή περισσότεροι πίνακες λέγονται ***του αυτού τύπου***, π.χ. (μ, ν), όταν έχουν το ίδιο πλήθος γραμμών μ και το ίδιο πλήθος στηλών ν.

Οι αριθμοί α_{ij} λέγονται ***στοιχεία*** του πίνακα. Το στοιχείο $\alpha_{k\rho}$, που βρίσκεται στην k γραμμή και στην ρ στήλη, λέγεται το *(k, ρ) στοιχείο* ή η *(k, ρ) συντεταγμένη* του πίνακα. Ο δείκτης k λέγεται *δείκτης γραμμής* και ο δείκτης ρ λέγεται *δείκτης στήλης*.

Δύο πίνακες λέμε ότι είναι ***ίσοι***, όταν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και τον ίδιο αριθμό στηλών, δηλαδή είναι του αυτού τύπου, και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Αντίστοιχα γράφουμε Α = Β.

Αν μ=1, δηλαδή αν ο πίνακας έχει μία μόνο γραμμή, τότε λέγεται *πίνακας γραμμής* ή *γραμμή τάξης ν*, ενώ αν είναι ν=1, δηλαδή αν ο πίνακας έχει μία μόνο στήλη, τότε λέγεται *πίνακας στήλης* ή *στήλη τάξης μ*. Ένας πίνακας που έχει ένα μόνο στοιχείο, π.χ. ο [2], λέγεται ***πίνακας στοιχείο***.

$$[2],\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Αν ισχύει μ=ν, δηλαδή αν το πλήθος των γραμμών ενός πίνακα είναι το ίδιο με το πλήθος των στηλών του, τότε ο πίνακας λέγεται ***τετραγωνικός πίνακας τάξης ν***. Τα στοιχεία α_{11}, α_{22}, ..., $\alpha_{\nu\nu}$ ενός τετραγωνικού πίνακα λέμε ότι αποτελούν την *πρωτεύουσα* ή *κύρια διαγώνιο* του πίνακα και τα στοιχεία $\alpha_{1\nu}$, $\alpha_{2,\nu-1}$, ..., $\alpha_{\nu 1}$ λέμε ότι αποτελούν την *δευτερεύουσα* διαγώνιο του πίνακα

Ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης ν, του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται έξω από την πρωτεύουσα διαγώνιο είναι ίσα με το μηδέν, λέγεται ***διαγώνιος πίνακας τάξης ν***.

Για συντομία, μπορούμε να γράψουμε :

$$\boxed{\begin{array}{c} A = [\alpha_{ij}] = \text{διαγώνιος πίνακας} \\ \Leftrightarrow \\ \alpha_{ij} = 0,\ \forall\, i \neq j \end{array}}$$

Αν σ' έναν διαγώνιο πίνακα τάξης ν, όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι ίσα με το 1, τότε ο πίνακας λέγεται ***μοναδιαίος πίνακας τάξης ν*** και παριστάνεται με το I_ν.

Για συντομία, μπορούμε να γράψουμε :

$$\boxed{\begin{array}{c} I = [\alpha_{ij}] = \text{μοναδιαίος πίνακας} \\ \Leftrightarrow \\ \alpha_{ij} = 0,\ \text{αν } i \neq j \\ \alpha_{ij} = 1,\ \text{αν } i = j \end{array}}$$

Από τους παρακάτω πίνακες, ο πρώτος είναι διαγώνιος και ο δεύτερος μοναδιαίος.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται ***τριγωνικός άνω*** όταν είναι μηδενικά όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο και ***τριγωνικός κάτω*** όταν είναι μηδενικά όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο.

Από τους παρακάτω πίνακες, ο πρώτος είναι τριγωνικός άνω και ο δεύτερος τριγωνικός κάτω.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Ένας πίνακας του τύπου (μ, ν), του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν, ονομάζεται ***μηδενικός πίνακας του τύπου (μ, ν)*** και παριστάνεται με $O_{\mu,\nu}$.

Για συντομία, μπορούμε να γράψουμε :

$$\boxed{\begin{gathered} O = [\alpha_{ij}] = \text{μηδενικός πίνακας} \\ \Leftrightarrow \\ \alpha_{ij} = 0,\ \forall\, i = 1, 2, ..., \mu \\ \text{και}\ \forall\, j = 1, 2, ..., \nu \end{gathered}}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται ***συμμετρικός*** αν ισχύει $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, δηλαδή αν είναι ίσα τα στοιχεία που είναι «συμμετρικά» ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται ***αντισυμμετρικός*** αν ισχύει $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, δηλαδή αν είναι αντίθετα τα στοιχεία που είναι «συμμετρικά» ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα. Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός αντι-συμμετρικού πίνακα είναι ίσα με το μηδέν.

Από τους παρακάτω πίνακες, ο πρώτος είναι συμμετρικός και ο δεύτερος αντισυμμετρικός.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Δύο πίνακες $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ του τύπου (μ, ν) είναι ***ίσοι***, τότε και μόνο τότε, όταν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, δηλαδή έχουμε :

$$\boxed{\begin{gathered} [\alpha_{ij}] = [\beta_{ij}] \Leftrightarrow \\ \alpha_{ij} = \beta_{ij} \\ \forall\, i = 1, 2, ..., \mu \\ \forall\, j = 1, 2, ..., \nu \end{gathered}}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Για να ***προσθέσουμε*** δύο πίνακες $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ του τύπου (μ, ν), προσθέτουμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους και προκύπτει ένας τρίτος πίνακας του ίδιου τύπου που είναι το άθροισμα των δύο πινάκων.

$$\boxed{\begin{array}{c} \Gamma = A + B \Leftrightarrow \\ \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \\ \forall\, i = 1, 2, ..., \mu \\ \forall\, j = 1, 2, ..., \nu \end{array}}$$

Αποκαλείται γινόμενο ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ του τύπου (μ, ν) επί έναν πραγματικό αριθμό λ (λA), ένας άλλος πίνακας του τύπου (μ, ν) τα στοιχεία του οποίου προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα Α με τον πραγματικό αριθμό λ. Τον πίνακα $-A$, ο οποίος προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα Α με το -1, τον ονομάζουμε ***αντίθετο πίνακα*** του Α.

Για τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα ισχύουν τα εξής :

- $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\kappa(\lambda A) = (\kappa\lambda)A$
- $1A = A$
- $(-1)A = -A$
- $\lambda.A = O \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $A = O$

Για την πρόσθεση πινάκων ισχύουν τα εξής :

- Αντιμεταθετική ιδιότητα : $A + B = B + A$
- Προσεταιριστική ιδιότητα : $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
- $A + O = O + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = O$

Για να ***αφαιρέσουμε*** δύο πίνακες $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ του τύπου (μ, ν), αφαιρούμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους και προκύπτει ένας τρίτος πίνακας του ίδιου τύπου που είναι η διαφορά των δύο πινάκων.

$$\boxed{\begin{array}{c} \Gamma = A - B \Leftrightarrow \\ \gamma_{ij} = \alpha_{ij} - \beta_{ij} \\ \forall\, i = 1, 2, ..., \mu \\ \forall\, j = 1, 2, ..., \nu \end{array}}$$

Ισχύει το εξής : $X + B = A \Leftrightarrow X = A - B$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ο πολλαπλασιασμός δύο πινάκων Α και Β ορίζεται μόνο όταν τα πλήθος των στηλών του Α είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του Β, οπότε ορίζουμε ως ***γινόμενο*** του πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ με τον πίνακα $B = [\alpha_{jk}]$, έναν τρίτο πίνακα Γ, ο οποίος έχει τόσες γραμμές όσες γραμμές έχει ο Α και τόσες στήλες όσες στήλες έχει ο Β, και το κάθε (i, k) στοιχείο του πίνακα Γ προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της i γραμμής του πίνακα Α με την k στήλη του πίνακα Β.

Ισχύει :

$$A_{\mu,\nu} \,.\, B_{\nu,\varrho} = \Gamma_{\mu,\varrho}$$

Θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα παρακάτω για τον πολλαπλασιασμό πινάκων :

1. Η μεταθετική ιδιότητα ΑΒ=ΒΑ δεν ισχύει πάντα στους πίνακες.
2. Αν ΑΒ=Ο, αυτό δεν σημαίνει πάντα ότι ένας τουλάχιστον από τους πίνακες Α, Β είναι ο μηδενικός.
3. Αν ΑΒ=ΑΓ ή ΒΑ=ΓΑ, αυτό δεν σημαίνει ότι μπορούμε να απαλείψουμε τον πίνακα Α από τα δύο μέλη, ακόμη και αν ο Α δεν είναι ο μηδενικός πίνακας.

Αλλά ο πολλαπλασιασμός πινάκων ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες, όταν φυσικά μπορούν να γίνουν οι αντίστοιχες πράξεις :

- Προσεταιριστική ιδιότητα : $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$
- Επιμεριστική ιδιότητα : $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$
- Επιμεριστική ιδιότητα : $(B+\Gamma)A = BA + \Gamma A$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, όπου $k \in R$.
- $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB =$ όπου $\lambda, \mu \in R$.
- $A.I_\nu = I_\mu.A = A$, για κάθε πίνακα Α τύπου (μ, ν).
- ΟΑ = ΑΟ = Ο, όπου Ο είναι οι μηδενικός πίνακας.
- $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ κοκ, όπου Α τετραγωνικός πίνακας.
- $A^p.A^q = A^{p+q}$, $(A^p)^q = A^{pq}$, $(\kappa A)^p = \kappa^p A^p$, όπουp και q είναι θετικοί ακέραιοι και $\kappa \in R$.

Στον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν θα πρέπει να αλλάζουμε την σειρά των πινάκων.

ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ονομάζουμε ***ανάστροφο*** *(transpose)* ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ του τύπου (μ, ν) και τον παριστάνουμε με A^t τον πίνακα $A^t = [\beta_{ji}]$ του τύπου (ν, μ), ο οποίος προκύπτει από τον A αν οι γραμμές του γραφτούν με την ίδια τάξη ως στήλες, οπότε και οι στήλες γράφονται ως γραμμές.

Ισχύει : $[\beta_{ji}] = [\alpha_{ij}]$ $\forall$ i = 1, 2, ..., μ και $\forall$ j = 1, 2, ..., ν. Αυτό σημαίνει ότι το (j, i) στοιχείο του A^t είναι ίσο με το (i, j) στοιχείο του A.

Για τους ανάστροφους πίνακες ισχύουν τα εξής :

- $(A^t)^t = A$
- $O^t = O$
- $(-A)^t = -A^t$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(A - B)^t = A^t - B^t$
- $(kA)^t = k(A^t)$, $\forall\ k \in R$
- $(A.B)^t = B^t.A^t$
- Αν ο A είναι συμμετρικός $\Leftrightarrow A^t = A$
- Αν ο A είναι αντισυμμετρικός $\Leftrightarrow A^t = -A$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Ονομάζουμε ***αντίστροφο*** ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν και τον παριστάνουμε με A^{-1} έναν άλλον τετραγωνικό πίνακα τάξης ν που ικανοποιεί τις εξής ισότητες :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_\nu$$

Όπου I_ν είναι ο μοναδιαίος πίνακας τάξης ν.

Ένας τετραγωνικός πίνακας A που έχει αντίστροφο πίνακα ονομάζεται ***αντιστρέψιμος*** ή ***ομαλός***. Ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα, αν υπάρχει, είναι μοναδικός και για δύο τετραγωνικούς πίνακες A και B της ίδιας τάξης αποδεικνύεται ότι αν ισχύει μια από τις ισότητες AB=I ή BA=I, τότε θα ισχύει και η άλλη. Επίσης, αν ισχύει AB=O και ένας από τους πίνακες είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι μηδενικός.

Αν ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος, τότε ισχύουν τα εξής :

$$\boxed{\begin{array}{l} AX = B \Leftrightarrow X=A^{-1}B \\ XA = B \Leftrightarrow X=BA^{-1} \end{array}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα x, y και z αν ισχύει : $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

2. Να βρεθούν τα x, y και z αν ισχύει : $2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

3. Να αποδειχθεί ότι :
$$\begin{bmatrix} συνα & ημα \\ -ημα & συνα \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} συνα & ημα \\ -ημα & συνα \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} συν2α & ημ2α \\ -ημ2α & συν2α \end{bmatrix}.$$

4. Να αποδειχθεί με τη μέθοδο της επαγωγής ότι $\forall\, ν \in N$ ισχύει :
$$\begin{bmatrix} α & 1 \\ 0 & α \end{bmatrix}^{ν} = \begin{bmatrix} α^{ν} & να^{ν-1} \\ 0 & α^{ν} \end{bmatrix}.$$

5. Να αποδειχθεί ότι αν ο Α είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε ο πίνακας $A + A^t$ είναι συμμετρικός.

6. Να βρεθεί ο αντίστροφος του τετραγωνικού πίνακα : $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

8. Να βρεθούν τα χ, ψ και ω για τα οποία ισχύει :
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2-χ \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \\ ψ-3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & ω-5 \\ 1 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$ *(Απ. χ=–7, ψ=8, ω=8).*

9. Να αποδειχθεί ότι το παρακάτω άθροισμα είναι ένας διαγώνιος πίνακας :
$$συνα\begin{bmatrix} συνα & -ημα \\ ημα & συνα \end{bmatrix} + ημα\begin{bmatrix} ημα & συνα \\ -συνα & ημα \end{bmatrix}.$$

10. Να βρεθούν οι πίνακες Χ και Υ για τους οποίους ισχύει :
$$3X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } 5X + 2Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

11. Να βρεθεί ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει για να είναι αντιστρέψιμος ένας πίνακας 2 Χ 2.

12. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα : $\begin{bmatrix} ημα & -συνα \\ συνα & ημα \end{bmatrix}$.

13. Να βρεθούν τα α, $β \in R$, ώστε να ισχύει $X^2 = I$ για τον πίνακα
$$X = \begin{bmatrix} α & 1 \\ 0 & β \end{bmatrix}.$$

14. Αν $A=\begin{bmatrix} \lambda & 1+\lambda \\ 1-\lambda & -\lambda \end{bmatrix}$, όπου $\lambda \in R$, να αποδειχθεί ότι $A^{\nu}=I$, αν ν άρτιος και $A^{\nu}=A$, αν ν περιττός.

15. Αν $A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$, να αποδειχθεί ότι $A^{3\nu}=I$, αν ν άρτιος και $A^{3\nu}=-I$, αν ν περιττός.