

ΠΙΝΑΚΕΣ

Ονομάζουμε **πίνακα** ή **μήτρα** (*matrix*) του τύπου (μ, ν) ή πίνακα με μ γραμμές και ν στήλες ή πίνακα $\mu \times \nu$ πάνω στο σύνολο \mathbb{R} και τον παριστάνουμε με $A_{\mu,\nu}$ ή και με A , μια ορθογώνια διευθέτηση (διάταξη ή και παράταξη) $\mu \times \nu$ στοιχείων, a_{ij} ($i=1, 2, \dots, \mu$ και $j = 1, 2, \dots, \nu$) του συνόλου \mathbb{R} σε μορφή ορθογωνίου σχήματος με μ γραμμές και ν στήλες, ως εξής :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας μπορεί να παρασταθεί και ως $A=[a_{ij}]_{\mu,\nu}$ ή και ως $A_{\mu,\nu}=[a_{ij}]$ ή και πιο απλά ως $A=[a_{ij}]$. Οι μ οριζόντιες ν -άδες είναι οι **γραμμές** του πίνακα A και οι ν κατακόρυφες μ -άδες είναι οι **στήλες** του πίνακα A .

Τους πίνακες τους παριστάνουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα. Ένας πίνακας με μ γραμμές και ν στήλες λέγεται **πίνακας του τύπου (μ, ν)** . Δύο ή περισσότεροι πίνακες λέγονται **του αυτού τύπου**, π.χ. (μ, ν) , όταν έχουν το ίδιο πλήθος γραμμών μ και το ίδιο πλήθος στηλών ν .

Οι αριθμοί a_{ij} λέγονται **στοιχεία** του πίνακα. Το στοιχείο $a_{k\varrho}$, που βρίσκεται στην k γραμμή και στην ϱ στήλη, λέγεται το **(k, ϱ) στοιχείο** ή η **(k, ϱ) συντεταγμένη** του πίνακα. Ο δείκτης k λέγεται **δείκτης γραμμής** και ο δείκτης ϱ λέγεται **δείκτης στήλης**.

Δύο πίνακες λέμε ότι είναι **ίσοι**, όταν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και τον ίδιο αριθμό στηλών, δηλαδή είναι του αυτού τύπου, και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Αντίστοιχα γράφουμε $A = B$.

Αν $\mu=1$, δηλαδή αν ο πίνακας έχει μία μόνο γραμμή, τότε λέγεται **πίνακας γραμμής** ή **γραμμή τάξης ν** , ενώ αν είναι $\nu=1$, δηλαδή αν ο πίνακας έχει μία μόνο στήλη, τότε λέγεται **πίνακας στήλης** ή **στήλη τάξης μ** . Ένας πίνακας που έχει ένα μόνο στοιχείο, π.χ. ο $[2]$, λέγεται **πίνακας στοιχείο**.

$$[2], [1 \ 2 \ 3], \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Αν ισχύει $\mu=n$, δηλαδή αν το πλήθος των γραμμών ενός πίνακα είναι το ίδιο με το πλήθος των στηλών του, τότε ο πίνακας λέγεται **τετραγωνικός πίνακας τάξης n** . Τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ενός τετραγωνικού πίνακα λέμε ότι αποτελούν την *πρωτεύουσα* ή *κύρια διαγώνιο* του πίνακα και τα στοιχεία $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ λέμε ότι αποτελούν την *δευτερεύουσα* διαγώνιο του πίνακα

Ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n , του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται έξω από την πρωτεύουσα διαγώνιο είναι ίσα με το μηδέν, λέγεται **διαγώνιος πίνακας τάξης n** .

Για συντομία, μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{aligned} A = [a_{ij}] &= \text{διαγώνιος πίνακας} \\ &\Leftrightarrow \\ a_{ij} &= 0, \forall i \neq j \end{aligned}$$

Αν ο ένας διαγώνιο πίνακας τάξης n , όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι ίσα με το 1, τότε ο πίνακας λέγεται **μοναδιαίος πίνακας τάξης n** και παριστάνεται με το I_n .

Για συντομία, μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{aligned} I = [a_{ij}] &= \text{μοναδιαίος πίνακας} \\ &\Leftrightarrow \\ a_{ij} &= 0, \text{ αν } i \neq j \\ a_{ij} &= 1, \text{ αν } i = j \end{aligned}$$

Από τους παρακάτω πίνακες, ο πρώτος είναι διαγώνιος και ο δεύτερος μοναδιαίος.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **τριγωνικός άνω** όταν είναι μηδενικά όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο και **τριγωνικός κάτω** όταν είναι μηδενικά όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο.

Από τους παρακάτω πίνακες, ο πρώτος είναι τριγωνικός άνω και ο δεύτερος τριγωνικός κάτω.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Ένας πίνακας του τύπου (μ, ν) , του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν, ονομάζεται **μηδενικός πίνακας του τύπου (μ, ν)** και παριστάνεται με $O_{\mu, \nu}$.

Για συντομία, μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{aligned} O &= [a_{ij}] = \text{μηδενικός πίνακας} \\ &\Leftrightarrow \\ a_{ij} &= 0, \forall i = 1, 2, \dots, \mu \\ &\text{και } \forall j = 1, 2, \dots, \nu \end{aligned}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **συμμετρικός** αν ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$, δηλαδή αν είναι ίσα τα στοιχεία που είναι «συμμετρικά» ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **αντισυμμετρικός** αν ισχύει $a_{ij} = -a_{ji}$, δηλαδή αν είναι αντίθετα τα στοιχεία που είναι «συμμετρικά» ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα. Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι ίσα με το μηδέν.

Από τους παρακάτω πίνακες, ο πρώτος είναι συμμετρικός και ο δεύτερος αντισυμμετρικός.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Δύο πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ του τύπου (μ, ν) είναι **ίσοι**, τότε και μόνο τότε, όταν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, δηλαδή έχουμε :

$$\begin{aligned} [a_{ij}] &= [\beta_{ij}] \Leftrightarrow \\ a_{ij} &= \beta_{ij} \\ \forall i &= 1, 2, \dots, \mu \\ \forall j &= 1, 2, \dots, \nu \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Για να **προσθέσουμε** δύο πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ του τύπου (μ, ν) , προσθέτουμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους και προκύπτει ένας τρίτος πίνακας του ίδιου τύπου που είναι το άθροισμα των δύο πινάκων.

$$\begin{aligned} \Gamma &= A + B \Leftrightarrow \\ \gamma_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} \\ \forall i &= 1, 2, \dots, \mu \\ \forall j &= 1, 2, \dots, \nu \end{aligned}$$

Αποκαλείται γινόμενο ενός πίνακα $A = [a_{ij}]$ του τύπου (μ, ν) επί έναν πραγματικό αριθμό λ (λA), ένας άλλος πίνακας του τύπου (μ, ν) τα στοιχεία του οποίου προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα A με τον πραγματικό αριθμό λ . Τον πίνακα $-A$, ο οποίος προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα A με το -1 , τον ονομάζουμε **αντίθετο πίνακα** του A .

Για τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα ισχύουν τα εξής :

- $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\kappa(\lambda A) = (\kappa\lambda)A$
- $1A = A$
- $(-1)A = -A$
- $\lambda A = O \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } A = O$

Για την πρόσθεση πινάκων ισχύουν τα εξής :

- Αντιμεταθετική ιδιότητα : $A + B = B + A$
- Προσεταιριστική ιδιότητα : $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
- $A + O = O + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = O$

Για να **αφαιρέσουμε** δύο πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ του τύπου (μ, ν) , αφαιρούμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους και προκύπτει ένας τρίτος πίνακας του ίδιου τύπου που είναι η διαφορά των δύο πινάκων.

$$\begin{aligned} \Gamma &= A - B \Leftrightarrow \\ \gamma_{ij} &= a_{ij} - b_{ij} \\ \forall i &= 1, 2, \dots, \mu \\ \forall j &= 1, 2, \dots, \nu \end{aligned}$$

Ισχύει το εξής : $X + B = A \Leftrightarrow X = A - B$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ο πολλαπλασιασμός δύο πινάκων A και B ορίζεται μόνο όταν τα πλήθος των στηλών του A είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του B , οπότε ορίζουμε ως *γινόμενο* του πίνακα $A = [a_{ij}]$ με τον πίνακα $B = [a_{jk}]$, έναν τρίτο πίνακα Γ , ο οποίος έχει τόσες γραμμές όσες γραμμές έχει ο A και τόσες στήλες όσες στήλες έχει ο B , και το κάθε (i, k) στοιχείο του πίνακα Γ προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της i γραμμής του πίνακα A με την k στήλη του πίνακα B .

Ισχύει :

$$A_{\mu, \nu} \cdot B_{\nu, \rho} = \Gamma_{\mu, \rho}$$

Θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα παρακάτω για τον πολλαπλασιασμό πινάκων :

1. Η μεταθετική ιδιότητα $AB=BA$ δεν ισχύει πάντα στους πίνακες.
2. Αν $AB=O$, αυτό δεν σημαίνει πάντα ότι ένας τουλάχιστον από τους πίνακες A, B είναι ο μηδενικός.
3. Αν $AB=AG$ ή $BA=GA$, αυτό δεν σημαίνει ότι μπορούμε να απαλείψουμε τον πίνακα A από τα δύο μέλη, ακόμη και αν ο A δεν είναι ο μηδενικός πίνακας.

Αλλά ο πολλαπλασιασμός πινάκων ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες, όταν φυσικά μπορούν να γίνουν οι αντίστοιχες πράξεις :

- Προσεταιριστική ιδιότητα : $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$
- Επιμεριστική ιδιότητα : $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$
- Επιμεριστική ιδιότητα : $(B+\Gamma)A = BA + \Gamma A$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, όπου $k \in \mathbb{R}$.
- $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB =$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $A \cdot I_\nu = I_\mu \cdot A = A$, για κάθε πίνακα A τύπου (μ, ν) .
- $OA = AO = O$, όπου O είναι οι μηδενικός πίνακας.
- $A^0 = I, A^1 = A, A^2 = AA$ κοκ, όπου A τετραγωνικός πίνακας.
- $A^p \cdot A^q = A^{p+q}, (A^p)^q = A^{pq}, (kA)^p = k^p A^p$, όπου και q είναι θετικό ακέραιος και $k \in \mathbb{R}$.

Στον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν θα πρέπει να αλλάζουμε την σειρά των πινάκων.

ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ονομάζουμε *ανάστροφο* (*transpose*) ενός πίνακα $A = [a_{ij}]$ του τύπου (μ, ν) και τον παριστάνουμε με A^t τον πίνακα $A^t = [\beta_{ji}]$ του τύπου (ν, μ) , ο οποίος προκύπτει από τον A αν οι γραμμές του γραφτούν με την ίδια τάξη ως στήλες, οπότε και οι στήλες γράφονται ως γραμμές.

Ισχύει : $[\beta_{ji}] = [a_{ij}] \quad \forall i = 1, 2, \dots, \mu$ και $\forall j = 1, 2, \dots, \nu$. Αυτό σημαίνει ότι το (j, i) στοιχείο του A^t είναι ίσο με το (i, j) στοιχείο του A .

Για τους ανάστροφους πίνακες ισχύουν τα εξής :

- $(A^t)^t = A$
- $O^t = O$
- $(-A)^t = -A^t$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(A - B)^t = A^t - B^t$
- $(kA)^t = k(A^t), \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Αν ο A είναι συμμετρικός $\Leftrightarrow A^t = A$
- Αν ο A είναι αντισυμμετρικός $\Leftrightarrow A^t = -A$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Ονομάζουμε *αντίστροφο* ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης n και τον παριστάνουμε με A^{-1} έναν άλλον τετραγωνικό πίνακα τάξης n που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Όπου I_n είναι ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n .

Ένας τετραγωνικός πίνακας A που έχει αντίστροφο πίνακα ονομάζεται *αντιστρέψιμος* ή *ομαλός*. Ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα, αν υπάρχει, είναι μοναδικός και για δύο τετραγωνικούς πίνακες A και B της ίδιας τάξης αποδεικνύεται ότι αν ισχύει μια από τις ιδιότητες $AB=I$ ή $BA=I$, τότε θα ισχύει και η άλλη. Επίσης, αν ισχύει $AB=O$ και ένας από τους πίνακες είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι μηδενικός.

Αν ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος, τότε ισχύουν τα εξής :

$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\ XA = B &\Leftrightarrow X = BA^{-1} \end{aligned}$
--

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα x, y και z αν ισχύει :
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$
2. Να βρεθούν τα x, y και z αν ισχύει :
$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$
3. Να αποδειχθεί ότι :
$$\begin{bmatrix} \sigma\nu\nu\alpha & \eta\mu\alpha \\ -\eta\mu\alpha & \sigma\nu\nu\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma\nu\nu\alpha & \eta\mu\alpha \\ -\eta\mu\alpha & \sigma\nu\nu\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\nu\nu 2\alpha & \eta\mu 2\alpha \\ -\eta\mu 2\alpha & \sigma\nu\nu 2\alpha \end{bmatrix}.$$
4. Να αποδειχθεί με τη μέθοδο της επαγωγής ότι $\forall n \in \mathbf{N}$ ισχύει :
$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix}.$$
5. Να αποδειχθεί ότι αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε ο πίνακας $A + A^t$ είναι συμμετρικός.
6. Να βρεθεί ο αντίστροφος του τετραγωνικού πίνακα :
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
7. Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση :
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
8. Να βρεθούν τα χ, ψ και ω για τα οποία ισχύει :
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2-\chi \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \\ \psi-3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \omega-5 \\ 1 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{Απ. } \chi=-7, \psi=8, \omega=8).$$
9. Να αποδειχθεί ότι το παρακάτω άθροισμα είναι ένας διαγώνιος πίνακας :
$$\sigma\nu\nu\alpha \begin{bmatrix} \sigma\nu\nu\alpha & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & \sigma\nu\nu\alpha \end{bmatrix} + \eta\mu\alpha \begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & \sigma\nu\nu\alpha \\ -\sigma\nu\nu\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix}.$$
10. Να βρεθούν οι πίνακες X και Y για τους οποίους ισχύει :
$$3X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } 5X + 2Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
11. Να βρεθεί ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει για να είναι αντιστρέψιμος ένας πίνακας 2×2 .
12. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα :
$$\begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & -\sigma\nu\nu\alpha \\ \sigma\nu\nu\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix}.$$
13. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, ώστε να ισχύει $X^2 = I$ για τον πίνακα
$$X = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

14. Αν $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1+\lambda \\ 1-\lambda & -\lambda \end{bmatrix}$, όπου $\lambda \in \mathbf{R}$, να αποδειχθεί ότι $A^n = I$, αν n άρτιος και $A^n = A$, αν n περιττός.
15. Αν $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$, να αποδειχθεί ότι $A^{3n} = I$, αν n άρτιος και $A^{3n} = -I$, αν n περιττός.