ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ & ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Η ορίζουσα β' τάξης ορίζεται ως εξής :

$$\boxed{\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{R} : \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

Οι ορίζουσες είναι χρήσιμες στην επίλυση γραμμικών συστημάτων με περισσότερους από έναν αγνώστους. Για παράδειγμα, αν έχουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα :

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 \psi &= \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi &= \gamma_2 \end{aligned}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος και εφόσον $\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, δίνεται με την βοήθεια των οριζουσών, ως εξής :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}},\ \psi = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}$$

Όπου μπορούμε να γράψουμε : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ και $\psi = \dfrac{\Delta_\psi}{\Delta}$

Η τυποποιημένη αυτή μέθοδος επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος α' βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους αποκαλείται ***κανόνας του Cramer*** και μας δείχνει ότι ο κάθε άγνωστος είναι πηλίκο δύο οριζουσών, με κοινό παρονομαστή την ορίζουσα Δ των συντελεστών των αγνώστων και αριθμητή που προκύπτει αν στην ορίζουσα του παρονομαστή αντικαταστήσουμε την στήλη των συντελεστών του αγνώστου με την στήλη των γνωστών όρων.

Σχετικά με τη διερεύνηση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, έχουμε τα εξής :

- Αν η ορίζουσα $\Delta \neq 0$, το σύστημα έχει μία και μόνο μία λύση, όπως είδαμε παραπάνω.
- Αν η ορίζουσα $\Delta = 0$ και οι ορίζουσες $\Delta_x \neq 0$ και $\Delta_\psi \neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν η ορίζουσα $\Delta = 0$ και οι ορίζουσες $\Delta_x = 0$ και $\Delta_\psi = 0$, αλλά οι συντελεστές των αγνώστων δεν είναι όλοι ίσοι με μηδέν, τότε το σύστημα έχει άπειρες το πλήθος λύσεις, όπου ο ένας άγνωστος λαμβάνεται αυθαίρετα (αόριστο σύστημα).
- Αν η ορίζουσα $\Delta = 0$ και οι ορίζουσες $\Delta_x = 0$ και $\Delta_\psi = 0$, αλλά οι συντελεστές των αγνώστων είναι όλοι ίσοι με μηδέν, τότε το σύστημα έχει άπειρες το πλήθος λύσεις, όπου όλοι οι άγνωστοι λαμβάνονται αυθαίρετα (ταυτοτικό σύστημα).

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα Α αντιστοιχεί ένας αριθμός που αποκαλείται ***ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα Α*** και συμβολίζεται με $|A|$. Είδαμε προηγουμένως πώς βρίσκεται το ανάπτυγμα (τιμή) μια ορίζουσας δεύτερης τάξης. Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να βρούμε το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας τρίτης ή και μεγαλύτερης τάξης αφού προηγουμένως δούμε μερικούς ορισμούς.

Θα δουλέψουμε με έναν τετραγωνικό πίνακα Α τρίτης τάξης :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Η αντίστοιχη ορίζουσα του Α είναι :

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Αποκαλούμε ***ελάσσονα ορίζουσα ενός στοιχείου*** της ορίζουσας $|A|$ την ορίζουσα που προκύπτει από την $|A|$ αν διαγράψουμε τη γραμμή και τη στήλη στην οποία ανήκει αυτό το στοιχείο. Για παράδειγμα, η ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου α_{11} συμβολίζεται με M_{11} και έχουμε :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}$$

Αποκαλούμε ***αλγεβρικό συμπλήρωμα ενός στοιχείου*** α_{ij} ενός πίνακα Α και το συμβολίζουμε με A_{ij}, το γινόμενο $(-1)^{i+j}.M_{ij}$, όπου M_{ij} είναι η ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου α_{ij}.

Ισχύει το εξής :

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}}$$

Για παράδειγμα, στον παρακάτω πίνακα Α, το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου της $2^{ης}$ γραμμής και $3^{ης}$ στήλης (8), είναι ίσο με –6, που προκύπτει από τις πράξεις (–1.(–2+8)).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Ισχύει ότι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $|A|$ ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης 3 είναι το άθροισμα των γινομένων όλων των στοιχείων μιας γραμμής ή στήλης με τα αντίστοιχα αλγεβρικά συμπληρώματα. Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης 3 ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα, είναι ίσο με :

$$|A| = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{12}A_{12} + \alpha_{13}A_{13}$$

Ενώ το ανάπτυγμα της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης 3 ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης του πίνακα, είναι ίσο με :

$$|A| = \alpha_{13}A_{13} + \alpha_{23}A_{23} + \alpha_{33}A_{33}$$

Η ορίζουσα ενός 2 x 2 πίνακα υπολογίζεται ως εξής :

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Οι βασικές ιδιότητες των οριζουσών είναι οι εξής :

- Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) ενός πίνακα Α είναι ίσα με μηδέν, τότε $|A| = 0$.
- Αν Α είναι ένας τετραγωνικός πίνακας και A^t είναι ο ανάστροφός του, τότε $|A^t| = |A|$, οπότε το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας δεν αλλάζει αν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές.
- Αν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές ή δύο στήλες ενός πίνακα Α, τότε το ανάπτυγμα της ορίζουσας που θα προκύψει θα είναι ίσο με $-|A|$.
- Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες ενός πίνακα έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.
- Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης ενός πίνακα μ' έναν πραγματικό αριθμό, τότε και η ορίζουσα του πίνακα πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.
- Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες ενός πίνακα έχουν ανάλογα στοιχεία, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.
- Αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης ενός πίνακα μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα k προσθετέων, τότε και η ορίζουσα του πίνακα μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα k οριζουσών.
- Αν στα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης ενός πίνακα προσθέσουμε τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής ή στήλης πολλαπλασιασμένα μ' έναν αριθμό, τότε η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται.
- Αν πολλαπλασιάσουμε έναν τετραγωνικό πίνακα Α τάξης ν μ' έναν πραγματικό αριθμό λ, τότε η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται επί λ^{ν}.
- Αν ένας πίνακας είναι τριγωνικός άνω ή κάτω, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.
- Η ορίζουσα ενός μηδενικού πίνακα είναι ίση με 0.
- Η ορίζουσα ενός μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με 1.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΡΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Η ορίζουσα γ' τάξης έχει την εξής μορφή :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_{31} & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Το ανάπτυγμα (τιμή) της παραπάνω ορίζουσας, σύμφωνα με όσα είδαμε νωρίτερα, είναι το εξής :

$$\Delta = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

΄Ενα σύστημα α' βαθμού τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους έχει την εξής μορφή :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 \psi + \gamma_1 \omega = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi + \gamma_2 \omega = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 \psi + \gamma_3 \omega = \delta_3 \end{vmatrix}$$

Για την επίλυση ενός συστήματος α' βαθμού με τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον γνωστό κανόνα του Cramer, ως εξής :

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \psi = \frac{\Delta_\psi}{\Delta}, \omega = \frac{\Delta_\omega}{\Delta}}$$

Για την διερεύνηση του παραπάνω συστήματος, ισχύουν τα εξής :

- Αν $\Delta \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
- Αν $\Delta = 0$ και μία τουλάχιστον από τις Δ_x, Δ_ψ και Δ_ω είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα είναι ***αδύνατο***.
- Αν $\Delta = \Delta_x = \Delta_\psi = \Delta_\omega = 0$, τότε το σύστημα είναι ***αόριστο***, δηλαδή έχει άπειρες το πλήθος λύσεις, αλλά μόνο ένας άγνωστος όρος μπορεί να πάρει αυθαίρετες τιμές και οι άλλοι άγνωστοι όροι εξαρτώνται απ' αυτόν.
- Αν όλοι οι συντελεστές των αγνώστων και οι γνωστοί όροι είναι ίσοι με μηδέν, τότε το σύστημα έχει άπειρες το πλήθος λύσεις αλλά είναι ***ταυτοτικό*** και όλοι οι άγνωστοι μπορούν πάρουν αυθαίρετες τιμές.
- Αν όλοι οι γνωστοί όροι είναι ίσοι με μηδέν ($\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$), τότε το σύστημα λέγεται ***ομογενές*** και έχει μία τουλάχιστον λύση, την μηδενική ($x=\psi=\omega=0$).

ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ομογενές γραμμικό σύστημα καλείται ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων στο οποίο οι γνωστοί όροι είναι ίσοι με το μηδέν. Το παρακάτω σύστημα είναι ομογενές γραμμικό :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 \psi = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi = 0 \end{vmatrix}$$

Μια προφανής λύση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι η μηδενική, δηλαδή όλοι οι άγνωστοι ίσοι με το μηδέν. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει ένα ομογενές γραμμικό σύστημα εκτός της μηδενικής και άλλες άπειρες το πλήθος λύσεις είναι να είναι ίση με το μηδέν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι : $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta+\gamma \\ 1 & \beta & \gamma+\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} = 0$.
2. Να αποδειχθεί ότι : $\begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)^3$.
3. Να επιλυθεί το σύστημα : $\begin{vmatrix} 2x+\psi-z=1 \\ -x+2\psi+z=6 \\ x+\psi+2z=9 \end{vmatrix}$ *(Απ. (x, ψ, z)=(1, 2, 3,)).*
4. Να αποδειχθεί ότι : $\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & 1+\gamma^2 \end{vmatrix} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$.
5. Να επιλυθεί το σύστημα : $\begin{vmatrix} x+\psi+z=1 \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma z=\delta \\ \alpha^2 x+\beta^2\psi+\gamma^2 z=\delta^2 \end{vmatrix}$.
6. Να επιλυθεί το σύστημα : $\begin{vmatrix} x+\psi=-1 \\ \psi+\omega=-19 \\ \omega+x=2 \end{vmatrix}$.
7. Να επιλυθεί το σύστημα : $\begin{vmatrix} \alpha x+\psi+\omega=-1 \\ x+\alpha\psi+\omega=\alpha \\ x+\psi+\alpha\omega=\alpha^2 \end{vmatrix}$.
8. Να επιλυθεί το σύστημα : $\begin{vmatrix} \dfrac{x}{5}=\dfrac{\psi}{6}=\dfrac{\omega}{15} \\ 2x+\psi-\omega=2 \end{vmatrix}$.
9. Να επιλυθεί το σύστημα : $\begin{vmatrix} \dfrac{x+\alpha}{\mu}=\dfrac{\psi+\beta}{\nu}=\dfrac{\omega+\gamma}{\lambda} \\ x+\psi+\omega=\kappa \end{vmatrix}$.
10. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη μεταξύ των α, β και γ, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής :
    $\begin{vmatrix} \alpha x+\psi+\omega=0 \\ x+\beta\psi+\omega=0 \\ x+\psi+\gamma\omega=0 \end{vmatrix}$ *(Απ. α+β+γ–αβγ=2).*
11. Αν το σύστημα $\alpha x + \beta\psi = 0$, $\beta^2 x + \alpha^2\psi = 0$ έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής, να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α και β.

12. Να αποδειχθεί ότι : $\begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha\beta & \beta\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

13. Να αποδειχθεί ότι : $\begin{vmatrix} \beta^2+\gamma^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \alpha^2+\gamma^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \alpha^2+\beta^2 \end{vmatrix} = 4\alpha^2\beta^2\gamma^2$.