ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το σύνολο R των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνεται με τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών. ***Ρητοί*** λέγονται οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με το Q. Το σύνολο των ***ακέραιων*** αριθμών είναι το Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} και το σύνολο των ***φυσικών*** αριθμών είναι το N = {0, 1, 2, 3, ...}.

Ισχύει το εξής : $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$. Τα σύνολα N-{0}, Z-{0}, Q-{0} και R-{0} συμβολίζονται και με N*, Z*, Q* και R* αντίστοιχα.

Αν $\alpha, \beta \in R$ και $\alpha < \beta$, τότε έχουμε τους εξής ορισμούς για τα ***διαστήματα*** *(σύνολα)* με άκρα τα α και β :

- $(\alpha, \beta) = \{x \in R \mid \alpha < x < \beta\}$: ***ανοικτό διάστημα***.
- $[\alpha, \beta] = \{x \in R \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$: ***κλειστό διάστημα***.
- $[\alpha, \beta) = \{x \in R \mid \alpha \leq x < \beta\}$: ***κλειστό-ανοικτό διάστημα***.
- $(\alpha, \beta] = \{x \in R \mid \alpha < x \leq \beta\}$: ***ανοικτό-κλειστό διάστημα***.

Αν $\alpha \in R$, τότε αποκαλούμε ***μη φραγμένα διαστήματα*** με άκρο το α τα εξής σύνολα :

- $(\alpha, +\infty) = \{x \in R \mid x > \alpha\}$
- $[\alpha, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq \alpha\}$
- $(-\infty, \alpha) = \{x \in R \mid x < \alpha\}$
- $(-\infty, \alpha] = \{x \in R \mid x \leq \alpha\}$

Υπό μορφή διαστήματος, μπορούμε να συμβολίσουμε και το σύνολο R ως εξής $(-\infty, +\infty)$. Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, αποκαλούνται ***εσωτερικά σημεία*** του Δ.

ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ονομάζουμε ***πραγματική συνάρτηση*** με πεδίο ορισμού το $A \subset R$ μια διαδικασία ή κανόνα f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σ' έναν και μόνο έναν πραγματικό αριθμό y, τον οποίο ονομάζουμε ***τιμή*** της f στο x και γράφουμε $\boldsymbol{f(x)}$.

Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου Α λέγεται ***ανεξάρτητη μεταβλητή***, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο x, λέγεται ***εξαρτημένη μεταβλητή***. Το ***πεδίο ορισμού*** της συνάρτησης f συμβολίζεται συνήθως με D_f και το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις τιμές της συνάρτησης f σ' όλα τα $x \in A$, λέγεται ***σύνολο τιμών*** της f και συμβολίζεται με $f(A)$.

Αν f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, τότε το σύνολο των σημείων M(x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή τα σημεία με συντεταγμένες $M(x, f(x))$, όπου $x \in A$, αποκαλείται ***γραφική παράσταση*** της συνάρτησης f και συμβολίζεται συνήθως με $\boldsymbol{C_f}$.

Στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν υπάρχουν σημεία που να έχουν την ίδια τετμημένη, δηλαδή κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σ' ένα το πολύ σημείο. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x'x της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x των τμημάτων της που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ***ίσες*** όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και για κάθε $x \in A$ ισχύει : $f(x)=g(x)$. Στις συναρτήσεις μπορούμε να ορίσουμε τις πράξεις του αθροίσματος, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου, ως εξής :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε ***σύνθεση της f με την g*** και γράφουμε fog, την συνάρτηση που έχει τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης fog αποτελείται απ' όλα εκείνα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης g. Οι συναρτήσεις gof και fog, αν ορίζονται, δεν είναι υποχρεωτικά πάντοτε ίσες.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται ***γνησίως αύξουσα*** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει : $f(x_1) < f(x_2)$. Μια συνάρτηση f λέγεται ***αύξουσα*** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει : $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Μια συνάρτηση f λέγεται ***γνησίως φθίνουσα*** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει : $f(x_1) > f(x_2)$. Μια συνάρτηση f λέγεται ***φθίνουσα*** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει : $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι ***γνησίως μονότονη*** στο διάστημα Δ. Αντίστοιχα, αν μια συνάρτηση f είναι αύξουσα ή φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι ***μονότονη*** στο διάστημα Δ.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) ***μέγιστο***, ίσο με $f(x_0)$, όταν ισχύει $f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in A$ και θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) ***ελάχιστο***, ίσο με $f(x_0)$, όταν ισχύει $f(x) \geq f(x_0) \ \forall x \in A$.

Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο. Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f αποκαλούνται ***ολικά ακρότατα*** της f.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1

Μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται ***συνάρτηση 1-1 (ένα προς ένα)***, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in A$, ισχύει :

$$\boxed{\text{Αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Το παραπάνω μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής :

$$\boxed{\text{Αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2}$$

Μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν :

- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης που να έχουν την ίδια τεταγμένη. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης 1-1 το πολύ σ' ένα σημείο.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση 1-1. Το αντίθετο δεν ισχύει πάντα.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow R$ είναι συνάρτηση 1-1, τότε μπορεί να οριστεί μια άλλη συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow R$, με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$, για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού Α της f.

Ισχύει το εξής :

$$\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x}$$

Η συνάρτηση g λέγεται ***αντίστροφη συνάρτηση*** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Ισχύει το εξής :

$$\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$$

Για παράδειγμα, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < \alpha \neq 1$, έχει ως αντίστροφη την λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όταν οι τιμές μια συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό l καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό x_0, λέμε τότε ότι ***το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0, είναι ίσο με l*** ή ότι ***το όριο της f(x) στο x_0 είναι ίσο με l*** και γράφουμε :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = l}$$

Ισχύουν τα εξής :

- Για να υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0, θα πρέπει η f να ορίζεται όσο γίνεται πιο κοντά στο x_0, δηλαδή σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.
- Το σημείο x_0 δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.
- Η τιμή της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν βέβαια υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριο της συνάρτησης στο x_0 ή όχι.

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό l καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), μιλάμε για το ***όριο από τα αριστερά της f στο x_0*** και γράφουμε :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_1}$$

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό l καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), μιλάμε για το ***όριο από τα δεξιά της f στο x_0*** και γράφουμε :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_2}$$

Τους παραπάνω αριθμούς τούς αποκαλούμε ***πλευρικά όρια*** της f στο x_0 και πιο συγκεκριμένα, το l_1 ***αριστερό όριο*** της f στο x_0 και το l_2 ***δεξί όριο*** της f στο x_0.

Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης *f* καθώς το x τείνει στο x_0, τότε θα υπάρχουν το αριστερό και το δεξί όριο της συνάρτησης στο ίδιο σημείο και θα έχουν την ίδια τιμή. Ισχύει και το αντίστροφο.

Ο ***ορισμός του ορίου*** είναι ο εξής :

Για μια συνάρτηση *f* που είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, θα λέμε ότι η *f* έχει στο x_0 όριο ίσο με $l \in R$, όταν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$, οσονδήποτε μικρό, υπάρχει ένας άλλος αριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει :

$$\boxed{|f(x) - l| < \varepsilon}$$

Αν μια συνάρτηση *f* είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) αλλά δεν ορίζεται σ' ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), τότε μπορεί να οριστεί το δεξί όριο της συνάρτησης καθώς το x τείνει στο x_0.

Αν μια συνάρτηση *f* είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) αλλά δεν ορίζεται σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β), τότε μπορεί να οριστεί το αριστερό όριο της συνάρτησης καθώς το x τείνει στο x_0.

Ισχύουν τα εξής :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} x = x_0} \qquad \boxed{\lim_{x \to x_0} c = c}$$

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων *f* και *g* στο x_0, τότε ισχύουν τα εξής :

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\kappa f(x)\right) = \kappa \lim_{x \to x_0} f(x), \acute{o}\pi o \upsilon \kappa \in \mathrm{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) . g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) . \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x \to x_0} f(x)\right|$$

Κριτήριο Παρεμβολής
Αν για τις συναρτήσεις *f*, *g* και *h* ισχύει :

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και}$$
$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l \text{, τότε}$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής αποδεικνύονται τα εξής :

$$\lim_{x \to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$\lim_{x \to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu x_0$$
$$\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu x_0$$
$$\lim_{x \to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν μια συνάρτηση *f* είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύουν τα εξής :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, αν για κάθε Μ > 0 υπάρχει ένα δ > 0, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει $f(x) > M$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, αν για κάθε Μ > 0 υπάρχει ένα δ > 0, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει $f(x) < -M$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Για να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης *f* όταν το x τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα εξής όρια :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = +\infty \text{, αν ν άρτιος}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = -\infty \text{, αν ν περιττός}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0 \text{, όπου } \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0 \text{, όπου } \nu \in \mathbb{N}^*$$

Για μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$, ισχύει :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

Για μια ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$, με $\alpha_\nu \neq 0$ και $\beta_\kappa \neq 0$, ισχύει :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνάρτηση f αποκαλείται ***συνεχής*** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν ισχύει το εξής :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Μια συνάρτηση f ***δεν είναι συνεχής*** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν είτε δεν υπάρχει το όριό της στο σημείο x_0 ή υπάρχει το όριό της στο σημείο x_0 αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό, $f(x_0)$.

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο x_0, τότε είναι συνεχείς στο σημείο αυτό και οι εξής συναρτήσεις :

- $f + g$
- $c.f$, όπου $c \in R$
- $f.g$
- $\dfrac{f}{g}$
- $|f|$
- $\sqrt[\nu]{f}$

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε και η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο σημείο x_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha).f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Το θεώρημα αυτό μάς λέει πρακτικά ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα και οι τιμές της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος είναι ετερόσημες, τότε η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα x'x σ' ένα τουλάχιστον σημείο ή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα αυτό.

Το ***θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών*** αποτελεί μια γενίκευση του θεωρήματος του Bozlano και σύμφωνα μ' αυτό αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα [α, β] και είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό η ανάμεσα στις τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Το θεώρημα αυτό μάς λέει πρακτικά ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα, τότε για κάθε ενδιάμεση τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο x_0 του άξονα x'x ώστε η τιμή $f(x_0)$ να είναι ίση μ' αυτήν την ενδιάμεση τιμή ή μπορούμε να πούμε ότι η γραφική της παράσταση τέμνεται οριζόντια σε κάθε ενδιάμεση τιμή του διαστήματος αυτού.

Για τις συνεχείς συναρτήσεις ισχύουν και τα εξής :

- ***Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής*** : Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα [α, β], τότε η f έχει στο διάστημα αυτό μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m, δηλαδή ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι ***γνησίως αύξουσα*** και ***συνεχής*** σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο των τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β), όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι ***γνησίως φθίνουσα*** και ***συνεχής*** σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο των τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Β, Α), όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$.
2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$.
3. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ όταν το x τείνει στο $x_0 = 0$.
4. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$ όταν το x τείνει στο $x_0 = 1$.
5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda^2-6$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda$, τότε να βρεθούν οι πιθανές τιμές του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
6. Να βρεθεί το παρακάτω όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2+4x+3}$.
7. Να βρεθεί το παρακάτω όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.
8. Να βρεθεί το παρακάτω όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}$.
9. Να βρεθεί το παρακάτω όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\phi x}{x}$.
10. Να βρεθεί το παρακάτω όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}$.
11. Να βρεθεί το παρακάτω όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}$. *(Υπ. Θέστε* $-x^2 = -2x^2 + x^2$*).*
12. Να βρεθεί το παρακάτω όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}$.
13. Να βρεθεί το παρακάτω όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$. *(Υπ. Πολλαπλασιάστε αριθμητή και παρονομαστή με* $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$*).*
14. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση ημx – x + 1 = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, π).
15. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [0, 1] και ισχύει $f(0) < g(0)$ και $f(1) > g(1)$, τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(0) = g(0)$.
16. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{x^4+1}{x-1}+\dfrac{x^6+1}{x-2}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 2).

17. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x}$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.