# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

## ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

***Προτασιακός τύπος*** ή ***ανοικτή πρόταση*** μιας μεταβλητής x, που παριστάνεται με p(x), λέγεται μια μαθηματική έκφραση που περιέχει μία μόνο μεταβλητή (σύμβολο) x. Αν η μεταβλητή ή το ακαθόριστο σύμβολο x αποκτήσει μια συγκεκριμένη τιμή, για παράδειγμα λ, τότε η έκφραση που θα προκύψει λέγεται ***λογική πρόταση*** ή και απλά ***πρόταση*** και παριστάνεται με p(λ) ή και με p.

Στα μαθηματικά αλλά και γενικότερα στην κλασική λογική με τον όρο ***πρόταση*** εννοούμε μια έκφραση με αυτοτελές νόημα ή έναν λόγο συντομότατο με εντελώς απλό περιεχόμενο, ο οποίος επιδέχεται έναν και μόνο έναν χαρακτηρισμό : ***αληθής (true)*** ή ***ψευδής (false)***, αποκλείοντας κάθε άλλη περίπτωση.

Ένας προτασιακός τύπος μετατρέπεται σε πρόταση όταν η μεταβλητή x αντικατασταθεί από ένα στοιχείο ενός καθορισμένου συνόλου.

Παραδείγματα απλών λογικών προτάσεων είναι τα εξής :

- *«ο αριθμός 11 είναι περιττός»* – αληθές
- *«ο αριθμός 121 είναι πρώτος»* – ψευδές

Παραδείγματα προτάσεων που δεν είναι λογικές είναι τα εξής :

- *«ο αριθμός x είναι θετικός»* – απροσδιόριστο
- *«ο αριθμός x+10 διαιρείται με το 10»* – απροσδιόριστο

Ας πάρουμε τώρα τον προτασιακό τύπο :

*p(x) : «ο x είναι πρώτος αριθμός»*

Τότε η πρόταση :

p(3) : *«ο 3 είναι πρώτος αριθμός»*, θα είναι αληθής,

ενώ η πρόταση :

p(6) : *«ο 6 είναι πρώτος αριθμός»*, θα είναι ψευδής.

Οι χαρακτηρισμοί αληθής (true) και ψευδής (false) αποκαλούνται ***τιμές αληθείας*** της πρότασης p. Τις λογικές προτάσεις τις παριστάνουμε συνήθως με τα μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και κατά προτίμηση με τα p, q, r κ.ά.

Αν το περιεχόμενο μιας πρότασης p είναι αληθές, τότε λέμε ότι η πρόταση έχει ***λογική τιμή Α*** ή ***τιμή αληθείας α*** και γράφουμε τ(p)=α, ενώ αν το περιεχόμενο μιας πρότασης p είναι ψευδές, τότε λέμε ότι η πρόταση έχει ***λογική τιμή Ψ*** ή ***τιμή αληθείας ψ*** και γράφουμε τ(p)=ψ.

| τ(p)=α αν p αληθής και τ(p)=ψ αν p ψευδής |
|---|

Η τιμή (έννοια, στοιχείο) λ με την οποία αντικαθιστούμε τη μεταβλητή x ενός προτασιακού τύπου p(x) για να προκύψει έτσι μια πρόταση, αποκαλείται ***τιμή*** της μεταβλητής. Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής αποκαλείται ***σύνολο αναφοράς*** της μεταβλητής του προτασιακού τύπου και το σύνολο των τιμών της μεταβλητής για τις οποίες ο προτασιακός τύπος γίνεται αληθής πρόταση, αποκαλείται ***σύνολο τιμών αληθείας*** του προτασιακού τύπου.

Το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής ενός προτασιακού τύπου συμβολίζεται συνήθως με U. Τότε ο προτασιακός τύπος λέγεται ***συνθήκη στο U*** και λέμε ότι ***η μεταβλητή x διατρέχει το U***.

Για παράδειγμα, στον προτασιακό τύπο $x^2 > 4$ μπορούμε να θεωρήσουμε σαν σύνολο αναφοράς U το σύνολο R των πραγματικών αριθμών και αν η απόλυτη τιμή της μεταβλητής $|x| > 2$, θα προκύψει αληθής πρόταση, ενώ αν η απόλυτη τιμή της μεταβλητής $|x| \leq 2$, θα προκύψει ψευδής πρόταση. Το σύνολο των τιμών αληθείας του παραπάνω προτασιακού τύπου είναι τα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(2, +\infty)$ του R.

# ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΕΣ

Είδαμε ότι αν η μεταβλητή ενός προτασιακού τύπου αντικατασταθεί μ' ένα συγκεκριμένο στοιχείο (τιμή, έννοια) του συνόλου αναφοράς του προτασιακού τύπου, τότε ο προτασιακός τύπος γίνεται μια (λογική) πρόταση.

Όμως, τιμές σ' έναν προτασιακό τύπο μπορούμε να δώσουμε και αν χρησιμοποιήσουμε εκφράσεις σαν τις εξής : «υπάρχει ένα τουλάχιστον», «για μερικά», «για κάθε», «για ένα και μόνο ένα», «για ένα το πολύ», «για κανένα» κ.ά. Οι παραπάνω εκφράσεις δημιουργούν λογικές προτάσεις και λέγονται ***ποσοδείκτες***.

Από τους ποσοδείκτες αυτούς, ο ποσοδείκτης *«υπάρχει ένα τουλάχιστον»* ή *«για μερικά»* αποκαλείται ***υπαρξιακός ποσοδείκτης*** και συμβολίζεται με $\exists$, ενώ ο ποσοδείκτης *«για κάθε»* ή *«γι' όλα τα»* αποκαλείται ***καθολικός*** ή ***γενικός ποσοδείκτης*** και συμβολίζεται με $\forall$. Οι ποσοδείκτες γράφονται συνήθως μπροστά από τους προτασιακούς τύπους.

Οι παρακάτω εκφράσεις είναι λογικές προτάσεις :

- $\exists x \in A$, p(x), δηλ. υπάρχει ένα τουλάχιστον x στο σύνολο A ώστε να ισχύει η p(x).
- $\forall x \in A$, p(x), δηλ. για κάθε x στο σύνολο A ισχύει η p(x).

Η πρώτη λέγεται ***υπαρξιακή*** και η δεύτερη ***καθολική πρόταση***. Κάθε υπαρξιακή και κάθε καθολική πρόταση είναι πάντοτε λογική πρόταση. Η έκφραση *«υπάρχει ένα και μόνο ένα»* συμβολίζεται με $\exists!$ ή και με $\exists'$.

Σαν γενικός κανόνας ισχύει το ότι στους προτασιακούς τύπους όπου το σύνολο αληθείας ταυτίζεται με το σύνολο αναφοράς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον καθολικό ή γενικό ποσοδείκτη $\forall$, ενώ στους προτασιακούς τύπους όπου το σύνολο αληθείας είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου αναφοράς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists$.

Ακολουθούν παραδείγματα :

- $\forall x\ (x \in R),\ p(x) : x^2+x+1 > 0$
- $\exists x\ (x \in R),\ p(x) : x^2-5x+6 > 0$

Αν χρησιμοποιούμε τον καθολικό ποσοδείκτη και το σύνολο των τιμών αληθείας P μιας λογικής πρότασης ταυτίζεται με το σύνολο αναφοράς U, οπότε το $P^c = \varnothing$, τότε η λογική πρόταση θα είναι αληθής, ενώ αν το σύνολο των τιμών αληθείας P της λογικής πρότασης είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου αναφοράς U, τότε η λογική πρόταση θα είναι ψευδής, οπότε το $P^c \neq \varnothing$.

Αν χρησιμοποιούμε τον υπαρξιακό ποσοδείκτη και το σύνολο των τιμών αληθείας P μιας λογικής πρότασης είναι διάφορο του κενού συνόλου $\varnothing$, τότε η λογική πρόταση θα είναι αληθής, ενώ αν το σύνολο των τιμών αληθείας P της λογικής πρότασης είναι ίσο με το κενό σύνολο $\varnothing$, τότε η λογική πρόταση θα είναι ψευδής.

# ΛΟΓΙΚΟΙ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Επειδή οι απλές προτάσεις δεν αρκούν για να εκφράσουμε πάντα αυτό που επιδιώκουμε, μπορούμε να συνδέσουμε δύο ή και περισσότερες προτάσεις μεταξύ τους χρησιμοποιώντας ειδικές λέξεις ή εκφράσεις, τις οποίες αποκαλούμε ***λογικούς συνδέσμους***.

Έτσι, μπορούμε να δημιουργήσουμε καινούργιες, πιο πολύπλοκες προτάσεις, που θα τις αποκαλούμε ***σύνθετες προτάσεις***.

Λογικοί σύνδεσμοι θεωρούνται οι εξής εκφράσεις : «και», «είτε», «ή», «αν ..., τότε», «τότε και μόνο τότε, αν», «όχι» («δεν»).

# ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΛΟΓΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Παριστάνουμε με L το σύνολο των απλών λογικών προτάσεων και θεωρούμε μια συνάρτηση τ που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο L και πεδίο τιμών το σύνολο των τιμών αληθείας {α, ψ}.

$$\boxed{\tau: L \rightarrow \{\alpha, \psi\} : p \rightarrow \tau(p) \in \{\alpha, \psi\}}$$

Οι διάφοροι τρόποι (συνδυασμοί) με τους οποίους μπορούμε να συνδέσουμε τις απλές λογικές προτάσεις για να δημιουργήσουμε μια σύνθετη πρόταση, αποτελούν τις ***λογικές πράξεις*** μεταξύ των λογικών προτάσεων.

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης καθορίζεται από τις τιμές αληθείας των απλών προτάσεων που την αποτελούν και φυσικά και από τον τρόπο που συνδυάζονται αυτές για να σχηματίσουν τη σύνθετη πρόταση.

Οι βασικές λογικές πράξεις και οι τιμές αληθείας των σύνθετων προτάσεων που δημιουργούνται είναι οι εξής :

**Σύζευξη**

Σύζευξη δύο λογικών προτάσεων p και q αποκαλούμε την πρόταση ***«p και q»***, συμβολικά «$p \wedge q$», η οποία είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς και ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι για να είναι ψευδής η σύζευξη δύο, ή και περισσοτέρων, προτάσεων αρκεί να είναι ψευδής μία μόνο από τις λογικές προτάσεις, χωρίς να μας ενδιαφέρει τι γίνεται με τις υπόλοιπες λογικές προτάσεις.

$$\boxed{\tau(p \wedge q) = \begin{cases} \alpha, \text{ αν } \tau(p) = \tau(q) = \alpha \\ \psi, \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}}$$

Στη Μαθηματική Λογική η μέθοδος που χρησιμοποιούμε περισσότερο για να βρούμε τις λογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων είναι η χρήση του ***πίνακα λογικών τιμών*** ή ***πίνακα αληθείας***, στον οποίο αναγράφουμε όλες τους δυνατούς συνδυασμούς των λογικών τιμών των προτάσεων που συνιστούν μια λογική πράξη.

Ο πίνακας αληθείας για τη λογική πράξη της σύζευξης είναι ο εξής :

| **p** | **q** | **$p \wedge q$** |
|---|---|---|
| α | α | α |
| α | ψ | ψ |
| ψ | α | ψ |
| ψ | ψ | ψ |

**Διάζευξη**

Διάζευξη ή και εγκλειστική διάζευξη δύο λογικών προτάσεων p και q αποκαλούμε την πρόταση ***«p είτε q»***, συμβολικά «$p \vee q$», η οποία είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι για να είναι αληθής η διάζευξη δύο, ή και περισσοτέρων, προτάσεων αρκεί να είναι αληθής μία μόνο από τις λογικές προτάσεις, χωρίς να μας ενδιαφέρει τι γίνεται με τις υπόλοιπες λογικές προτάσεις.

$$\tau(p \vee q) = \begin{cases} \psi, \text{ αν } \tau(p) = \tau(q) = \psi \\ \alpha, \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Ο πίνακας αληθείας για τη λογική πράξη της διάζευξης είναι ο εξής :

| **p** | **q** | **$p \vee q$** |
|---|---|---|
| α | α | α |
| α | ψ | α |
| ψ | α | α |
| ψ | ψ | ψ |

**Αποκλειστική Διάζευξη**

Αποκλειστική διάζευξη δύο λογικών προτάσεων p και q αποκαλούμε την πρόταση ***«p ή q»*** ή διαφορετικά ***«ή μόνο p ή μόνο q»***, συμβολικά «$p \underline{\vee} q$», η οποία είναι ψευδής στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις έχουν την ίδια τιμή αληθείας και αληθής στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις έχουν διαφορετικές τιμές αληθείας.

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι αληθής η αποκλειστική διάζευξη δύο, ή και περισσοτέρων, προτάσεων πρέπει να είναι αληθής μία και μόνο μία μόνο από τις λογικές προτάσεις και όλες οι υπόλοιπες λογικές προτάσεις πρέπει να είναι ψευδείς.

$$\tau(p \veebar q) = \begin{cases} \psi, \text{ αν } \tau(p) = \tau(q) \\ \alpha, \text{ αν } \tau(p) \neq \tau(q) \end{cases}$$

Ο πίνακας αληθείας για τη λογική πράξη της αποκλειστικής διάζευξης είναι ο εξής :

| **p** | **q** | $\mathbf{p \veebar q}$ |
|---|---|---|
| α | α | ψ |
| α | ψ | α |
| ψ | α | α |
| ψ | ψ | ψ |

**Άρνηση**

Άρνηση μιας λογικής πρότασης p αποκαλούμε την πρόταση ***«όχι p»***, συμβολικά «~p», η οποία είναι αληθής στην περίπτωση που η p είναι ψευδής και ψευδής στην περίπτωση που η p είναι αληθής. Οι τιμές αληθείας των λογικών προτάσεων p και ~p είναι πάντα αντίθετες. Η άρνηση διαφέρει από τις άλλες λογικές πράξεις στο ότι είναι μια μονομελής πράξη.

$$\tau(\sim p) = \begin{cases} \alpha, \text{ αν } \tau(p) = \psi \\ \psi, \text{ αν } \tau(p) = \alpha \end{cases}$$

Ο πίνακας αληθείας για τη λογική πράξη της άρνησης είναι ο εξής :

| **p** | **~p** |
|---|---|
| α | ψ |
| ψ | α |

Ισχύουν τα εξής :

- $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$
- $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
- $\sim (p \veebar q) = (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

**Συνεπαγωγή**

Συνεπαγωγή δύο λογικών προτάσεων p και q αποκαλούμε την πρόταση ***«αν p, τότε q»*** ή διαφορετικά ***«p συνεπάγεται q»***, συμβολικά $p \Rightarrow q$, η οποία είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που η p είναι αληθής και η q ψευδής και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση.

Η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ διατυπώνεται και ως *«p είναι ικανή συνθήκη για q»* ή *«q είναι αναγκαία συνθήκη για p»*. Ακόμη, η πρόταση p λέγεται ***υπόθεση*** και η πρόταση q λέγεται ***συμπέρασμα*** και το $p \Rightarrow q$ είναι ένα ***θεώρημα***. Η εργασία με τις αληθείς προτάσεις του τύπου $p \Rightarrow q$ λέγεται ***παραγωγικός συλλογισμός*** ή και απλά ***συλλογισμός***.

$$\tau(p \Rightarrow q) = \begin{cases} \psi, \text{ αν } \tau(p) = \alpha \text{ και } \tau(q) = \psi \\ \alpha, \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Ο πίνακας αληθείας για τη λογική πράξη της συνεπαγωγής είναι ο εξής :

| **p** | **q** | **$p \Rightarrow q$** |
|---|---|---|
| α | α | α |
| α | ψ | ψ |
| ψ | α | α |
| ψ | ψ | α |

Η ιδιομορφία που φαίνεται με μια πρώτη ματιά στο ότι όταν η πρόταση p είναι ψευδής, έχουμε αληθή τιμή για τη συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ και αυτό ανεξάρτητα από την τιμή της πρότασης q, εξηγείται από το ότι όταν είναι ψευδής η υπόθεση p, τότε συμφωνούμε να θεωρούμε αληθή τη συνεπαγωγή, δηλ. τον συλλογισμό, και αυτό ανεξάρτητα από το αν το συμπέρασμα είναι αληθές ή ψευδές.

Οι συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$ λέγονται ***αντίστροφες*** η μια της άλλης, ενώ οι συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ και $\sim p \Rightarrow \sim q$ λέγονται ***αντίθετες***. Η συνεπαγωγή $\sim q \Rightarrow \sim p$ λέγεται ***αντιστροφοαντίθετος*** της $p \Rightarrow q$.

Η αντιστροφοαντίθετος μιας συνεπαγωγής έχει τις ίδιες τιμές αληθείας, είναι δηλ. ισοδύναμη, με την αρχική συνεπαγωγή. Δηλαδή ισχύει :

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Επίσης, η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι ισοδύναμη με την $\sim p \vee q$.

**Λογική Ισοδυναμία**

Λογική ισοδυναμία δύο λογικών προτάσεων p και q αποκαλούμε την πρόταση ***«p τότε και μόνο τότε, αν q»*** ή διαφορετικά ***«p συνεπάγεται q και αντιστρόφως»***, συμβολικά $p \Leftrightarrow q$, η οποία είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις έχουν την ίδια τιμή αληθείας και ψευδής όταν οι δύο προτάσεις έχουν διαφορετικές τιμές αληθείας.

$$\tau(p \Leftrightarrow q) = \begin{cases} \alpha, \text{ αν } \tau(p) = \tau(q) \\ \psi, \text{ αν } \tau(p) \neq \tau(q) \end{cases}$$

Δύο προτάσεις p και q θα λέμε ότι είναι ***ισοδύναμες***, αν η σύζευξη $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ είναι αληθής. Λέμε τότε ότι το p ισοδυναμεί λογικά με το q ή ότι p είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για q ή p πρέπει και αρκεί για q ή p αν και μόνο αν q.

Ο πίνακας αληθείας για τη λογική πράξη της λογικής ισοδυναμίας είναι ο εξής :

| **p** | **q** | **$p \Leftrightarrow q$** |
|---|---|---|
| α | α | α |
| α | ψ | ψ |
| ψ | α | ψ |
| ψ | ψ | α |

Ισχύουν τα εξής :

- $p \Leftrightarrow p$
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$
- $(p \Leftrightarrow q \wedge q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

Παραθέτουμε συνοπτικά τον πίνακα των τιμών αληθείας όλων των βασικών λογικών πράξεων.

| p | q | **Σύζευξη** | **Διάζευξη** | **Αποκλειστική Διάζευξη** | **Συνεπαγωγή** | **Ισοδυναμία** | **Άρνηση** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \underline{\vee} q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ | ~p | ~q |
| α | α | α | α | ψ | α | α | ψ | ψ |
| α | ψ | ψ | α | α | ψ | ψ | ψ | α |
| ψ | α | ψ | α | α | α | ψ | α | ψ |
| ψ | ψ | ψ | ψ | ψ | α | α | α | α |

# ΛΟΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ – ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΕΣ – ΑΝΤΙΛΟΓΙΕΣ

***Λογικός τύπος*** αποκαλείται μια σύνθετη λογική πρόταση που σχηματίζεται από ένα πεπερασμένο πλήθος απλών λογικών προτάσεων p, q, r, ..., οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα (λογικούς συνδέσμους) $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, ~, $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$. Οι λογικές προτάσεις p, q, r, ..., που μπορούν να πάρουν τις τιμές α ή ψ, αποκαλούνται ***μεταβλητές*** του λογικού τύπου.

***Ταυτολογία*** αποκαλείται ένας λογικός τύπος που έχει τιμή αληθείας α για κάθε συνδυασμό των τιμών αληθείας των προτάσεων που τον αποτελούν. Οι ταυτολογίες συμβολίζονται με το $\vdash$, π.χ. $\vdash$P, αν P είναι μια ταυτολογία.

Ορισμένες θεμελιώδεις ταυτολογίες (αρχές ή νόμοι) είναι οι εξής :

| | |
|---|---|
| Νόμος της ταυτότητας | $\vdash p \Rightarrow p$ |
| Νόμος της μη αντίφασης | $\vdash \sim[p \wedge (\sim p)]$ |
| Νόμος του αποκλεισμού του τρίτου | $\vdash p \underline{\vee} (\sim p)$ |
| Νόμος της διπλής άρνησης | $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$ |
| Νόμος του συλλογισμού | $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ |

Ένας λογικός τύπος P θα λέγεται ***ταυτολογικά ισοδύναμος*** μ' έναν άλλον λογικό τύπο Q, συμβολικά $P \equiv Q$, όταν και μόνο όταν οι δύο λογικοί τύποι έχουν πάντα την ίδια τιμή αληθείας, μ' άλλα λόγια αν η ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$ είναι ταυτολογία.

Ορισμένες θεμελιώδεις ισοδυναμίες (ταυτολογίες) είναι οι εξής :

1. $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p) \vee q$
2. $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(\sim p) \vee q] \wedge [p \vee (\sim q)]$
3. $(p \underline{\vee} q) \equiv [(\sim p) \wedge q] \vee [p \wedge (\sim q)]$
4. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$
5. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$
6. $\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$
7. $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q)$
8. $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$
9. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
10. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
11. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
12. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
13. $p \vee p \equiv p$
14. $p \wedge p \equiv p$
15. $\sim(p \wedge q) \equiv (p \Rightarrow \sim q)$

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να εκφράσουμε έναν οποιονδήποτε λογικό τύπο με τη βοήθεια μόνο των δύο λογικών συνδέσμων (πράξεων) $\vee$ (είτε) και ~ (άρνηση).

***Αντιλογία*** ή ***αντίφαση*** αποκαλείται ένας λογικός τύπος Q όταν η άρνησή του ~Q είναι ταυτολογία. Αυτό σημαίνει ότι μια αντιλογία έχει τιμή αληθείας ψ για κάθε συνδυασμό των τιμών αληθείας των προτάσεων που την αποτελούν. Για τον συμβολισμό της αντιλογίας χρησιμοποιούμε το $\sim\vdash$, π.χ. $\sim\vdash Q$, αν Q είναι μια αντιλογία.

Είναι προφανές ότι η άρνηση μιας ταυτολογίας αποτελεί αντίφαση και η άρνηση μιας αντίφασης ταυτολογία.

***Τύπος αληθής κατά συγκυρία*** ή ***σχετικός τύπος*** αποκαλείται ένας λογικός τύπος ο οποίος δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση, αλλά για κάποιες τιμές των μεταβλητών του δίνει αληθές αποτέλεσμα και για άλλες τιμές των μεταβλητών του δίνει ψευδές αποτέλεσμα.