ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥΣ

Παραθέτουμε αρχικά τις βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με βάση έναν θετικό πραγματικό αριθμό και εκθέτη έναν ρητό αριθμό.

- $\alpha^x.\alpha^y = \alpha^{x+y}$
- $(\alpha.\beta)^x = \alpha^x.\beta^x$
- $\alpha^x:\alpha^y = \alpha^{x-y}$
- $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$
- $\alpha \neq 1$ και $\alpha^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- $\alpha \neq 1$ και $\alpha^x = \alpha^y \Leftrightarrow x = y$
- $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^x > \beta^x$ όταν $x > 0$
- $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^x < \beta^x$ όταν $x < 0$
- $x > y \Leftrightarrow \alpha^x > \alpha^y$ όταν $\alpha > 0$
- $x > y \Leftrightarrow \alpha^x < \alpha^y$ όταν $0 < \alpha < 1$
- $\alpha = 1$ και $x \neq y \Rightarrow \alpha^x = \alpha^y = 1$

Στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός της μορφής $\frac{m}{n}$, όπου μ και ν ακέραιοι και ν>0, ορίζουμε δύναμη με βάση έναν θετικό αριθμό α και εκθέτη έναν ρητό αριθμό, την εξής παράσταση :

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι άρρητος αριθμός, ορίζουμε δύναμη με βάση έναν θετικό αριθμό α και εκθέτη έναν πραγματικό αριθμό x, το όριο της ακολουθίας α^{ρ_ν}, όπου ρ_ν μια ακολουθία ρητών αριθμών με όριο τον πραγματικό αριθμό x.

$$\boxed{\alpha^x = \lim \alpha^{\rho_\nu}}$$

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες, που αναφέραμε προηγουμένως, ισχύουν και στην περίπτωση δυνάμεων με εκθέτες άρρητους αριθμούς, άρα και γενικότερα με εκθέτες οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς.

Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, τότε ισχύει ότι $\alpha^x > 0 \ \forall x \in R$. Στην περίπτωση που $\alpha = 1$, το 1^x είναι ίσο με $1 \ \forall x \in R$. Αποδεικνύεται ότι όταν το x μεταβάλλεται στο διάστημα $-\infty < x < +\infty$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ λαμβάνει ως τιμές όλους τους θετικούς αριθμούς.

Στηριζόμενοι στην παραπάνω ιδιότητα, ορίζουμε τον λογάριθμο ενός αριθμού θ με βάση τον αριθμό α ως εξής :

Τον μοναδικό πραγματικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει η σχέση :

$$\alpha^x = \theta, \text{ όπου } \alpha > 0,\ \alpha \neq 1 \text{ και } \theta > 0$$

τον αποκαλούμε ***λογάριθμο του θ ως προς βάση α*** και γράφουμε $\log_\alpha\theta$.

Όταν α = 10, μπορούμε να γράψουμε logθ αντί για $\log_{10}\theta$ και τον αποκαλούμε ***δεκαδικό λογάριθμο***.

Έχουμε έτσι την εξής ισοδυναμία :

$$\boxed{\log_\alpha\theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta \Leftrightarrow \alpha^{\log_\alpha\theta} = \theta}$$

Τονίζουμε ότι ο λογάριθμος ενός αριθμού x με βάση α έχει νόημα αν και μόνο αν x > 0 και $0 < \alpha \neq 1$.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται κατά βάση δύο λογαριθμικά συστήματα, το δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα και το Νεπέρειο λογαριθμικό σύστημα.

Στο ***δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα*** χρησιμοποιούμε σαν βάση τον αριθμό 10 και έτσι ο λογάριθμος ενός αριθμού στο σύστημα αυτό αποκαλείται δεκαδικός λογάριθμος και γράφεται απλά logθ αντί για $\log_{10}\theta$. Οι δεκαδικοί λογάριθμοι αποκαλούνται και *κοινοί λογάριθμοι*.

$$\boxed{\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta}$$

Στο ***Νεπέρειο λογαριθμικό σύστημα*** χρησιμοποιούμε σαν βάση τον αριθμό e = 2,71828182..., ο οποίος ορίζεται ως το όριο της ακολουθίας $(1+\frac{1}{n})^\nu$, όπου ν = 1, 2, 3, ... Η ακολουθία αυτή αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και άρα έχει όριο στο R.

Ο λογάριθμος ενός αριθμού στο σύστημα αυτό αποκαλείται νεπέρειος λογάριθμος και γράφεται απλά lnθ αντί για $\log_e\theta$. Οι νεπέρειοι λογάριθμοι αποκαλούνται και *φυσικοί λογάριθμοι*.

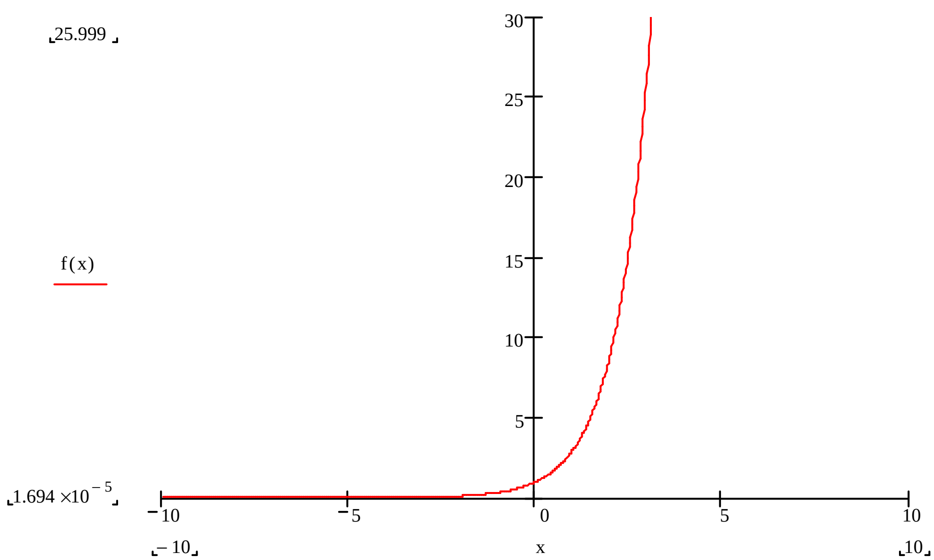
$$\boxed{\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta}$$

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

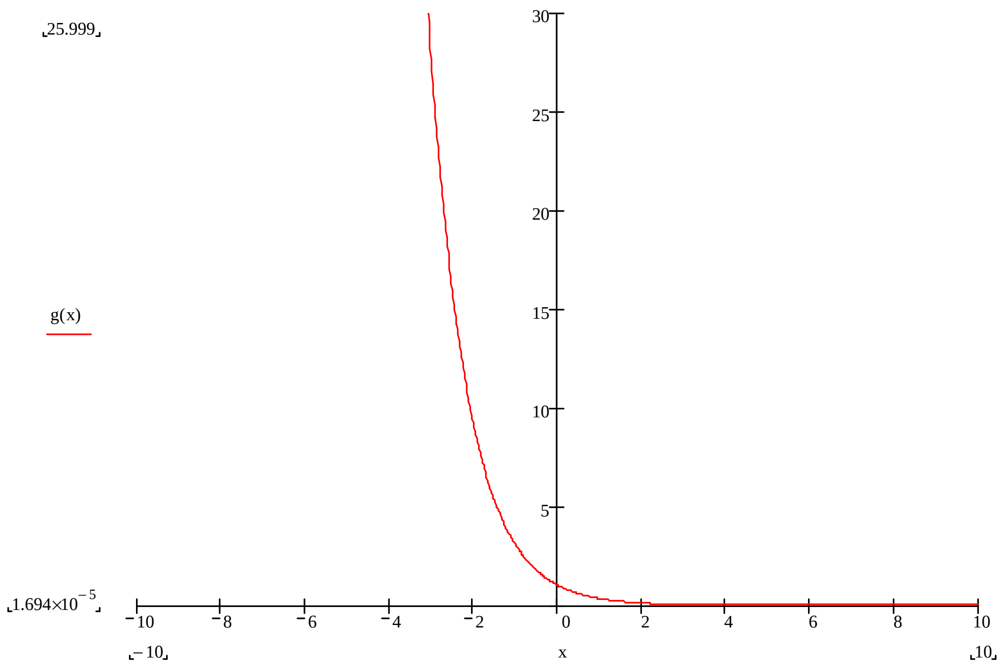
Η συνάρτηση f: $R \to R^+$: $x \to f(x) = \alpha^x$, όπου $0 < \alpha \neq 1$, ονομάζεται ***εκθετική συνάρτηση με βάση α***.

Η εκθετική συνάρτηση έχει τις εξής ιδιότητες :

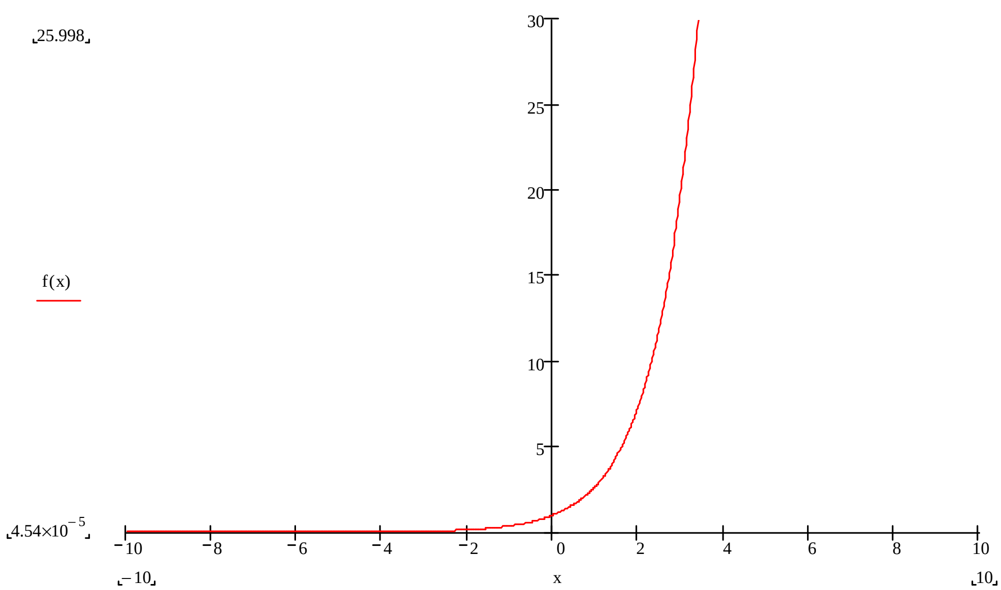
- Πεδίο ορισμού ολόκληρο το R.
- Πεδίο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $(0, +\infty)$.
- Είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$, δηλ. αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα όταν $\alpha < 1$, δηλ. αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$.
- Αν $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \alpha^{x_2}$.
- Αν $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} \neq \alpha^{x_2}$.
- Αν $\alpha > 1$ έχει όριο το $+\infty$ όταν $x \to +\infty$ και όριο το 0 όταν $x \to -\infty$.
- Αν $\alpha < 1$ έχει όριο το 0 όταν $x \to +\infty$ και όριο το $+\infty$ όταν $x \to -\infty$.
- Η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο (0, 1) και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x όταν $\alpha > 1$, ενώ έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα των x όταν $\alpha < 1$.
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων α^x και $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ή α^{-x} είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των y.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$.

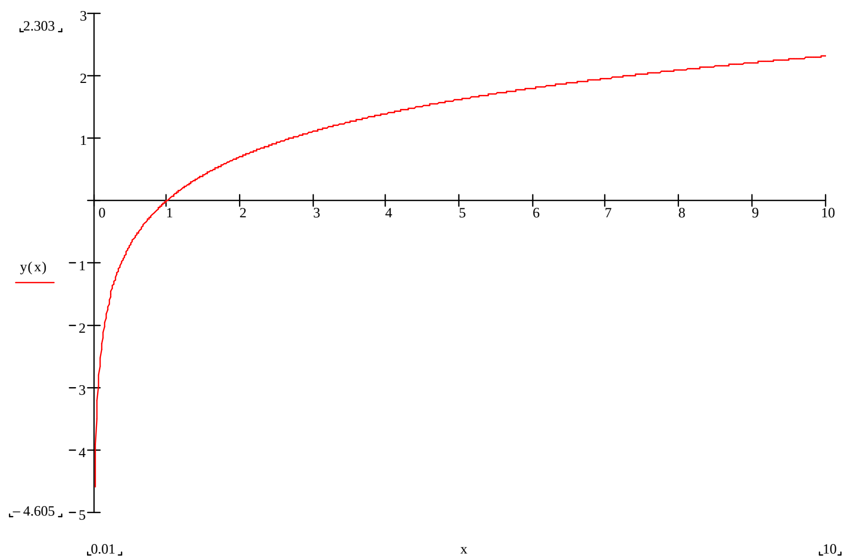
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η συνάρτηση f: $R^+ \to R$: $x \to f(x) = \log_\alpha x$, όπου $0 < \alpha \neq 1$, ονομάζεται ***λογαριθμική συνάρτηση με βάση α***. Η λογαριθμική συνάρτηση αποτελεί την αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$.

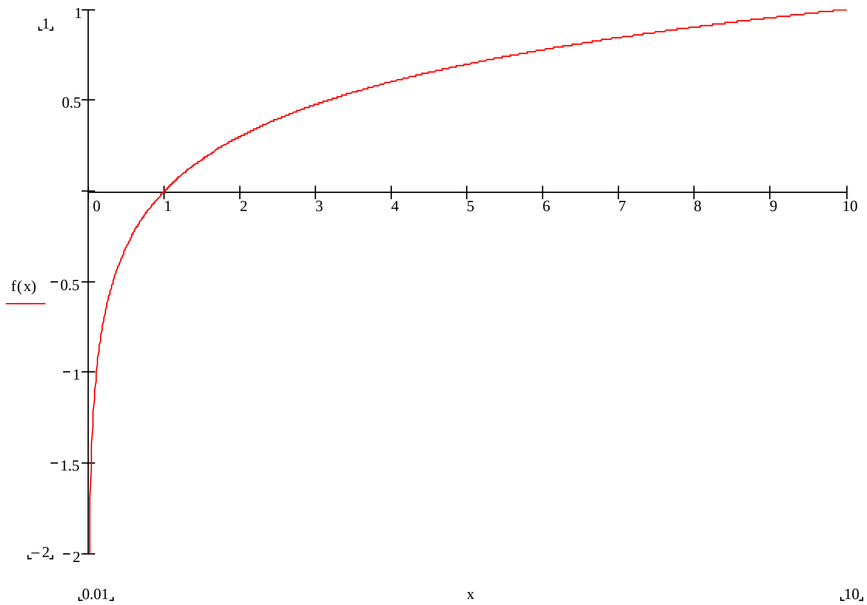
Η λογαριθμική συνάρτηση $\log_\alpha x$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \alpha < 1$.

Η λογαριθμική συνάρτηση έχει τις εξής ιδιότητες :

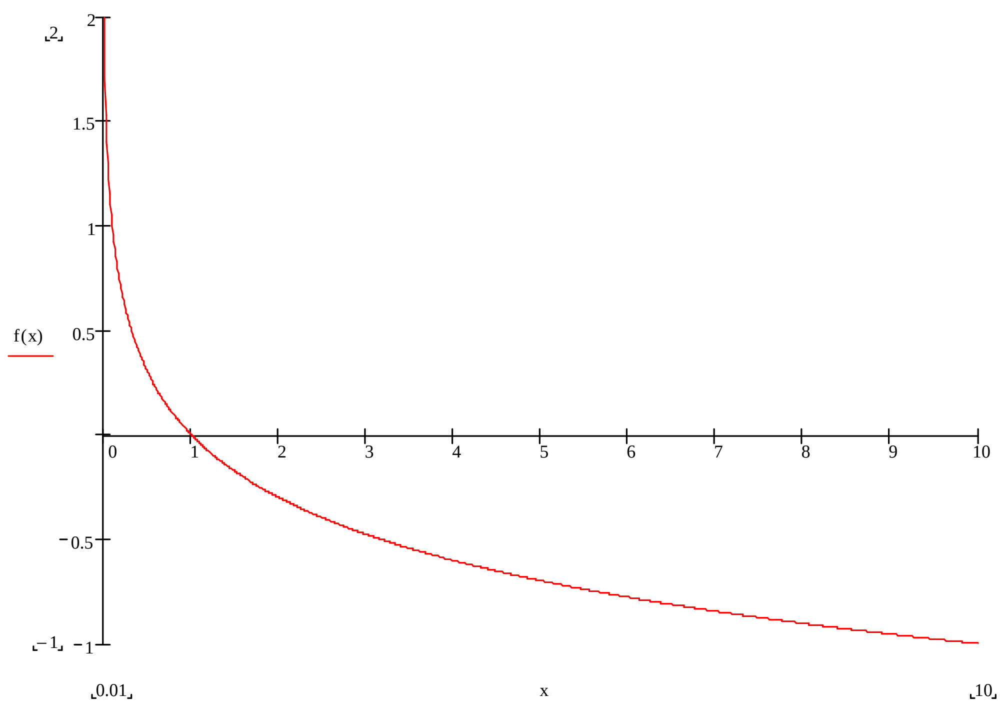
- Πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $(0, +\infty)$.
- Πεδίο τιμών ολόκληρο το R.
- Είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha>1$, δηλ. αν $x_1<x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα όταν $\alpha<1$, δηλ. αν $x_1<x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2$.
- Αν $x_1=x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2$.
- Αν $x_1\neq x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1\neq \log_\alpha x_2$.
- Αν $\alpha>1$ έχει όριο το $+\infty$ όταν $x \to +\infty$ και όριο το $-\infty$ όταν $x \to 0$.
- Αν $\alpha<1$ έχει όριο το $-\infty$ όταν $x \to +\infty$ και όριο το $+\infty$ όταν $x \to 0$.
- Η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο (1, 0) και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των y όταν $\alpha>1$, ενώ έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα των y όταν $\alpha<1$.
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\log_\alpha x$ και $\log_{\frac{1}{a}} x$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των x.
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων α^x και $\log_\alpha x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση y=x, δηλ. την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες των αξόνων x και y και διέρχεται από το πρώτο τεταρτημόριο.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log x$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Δύο θετικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν είναι ίσοι οι λογάριθμοί τους ως προς την ίδια βάση.

$$\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathrm{R}^+,\ 0 < \alpha \neq 1,\quad \log_\alpha\theta_1 = \log_\alpha\theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$$

Σ' όλα τα λογαριθμικά συστήματα, ο λογάριθμος του 1 είναι ίσος με 0 και ο λογάριθμος της βάσης είναι ίσος με 1.

$$\log_\alpha 1 = 0 \text{ και } \log_\alpha\alpha = 1$$

Ο λογάριθμος του γινομένου δύο ή και περισσοτέρων θετικών αριθμών ως προς την ίδια βάση α είναι ίσος με το άθροισμα των λογαρίθμων αυτών των αριθμών.

$$\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathrm{R}^+,\ 0 < \alpha \neq 1,\quad \log_\alpha(\theta_1.\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$$

Ο λογάριθμος του πηλίκου δύο θετικών αριθμών ως προς την ίδια βάση α είναι ίσος με τη διαφορά των λογαρίθμων αυτών των αριθμών (λογάριθμος διαρετέου – λογάριθμος διαιρέτη).

$$\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathrm{R}^+,\ 0 < \alpha \neq 1,\quad \log_\alpha\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$$

Ο λογάριθμος του αντιστρόφου ενός θετικού αριθμού είναι ίσος με τον αντίθετο του λογαρίθμου του αριθμού αυτού.

$$\forall\, \theta \in \mathrm{R}^+,\ 0 < \alpha \neq 1,\quad \log_\alpha\left(\frac{1}{q}\right) = -\log_\alpha\theta$$

Ο λογάριθμος μιας δύναμης ενός θετικού αριθμού ως προς μια βάση α είναι ίσος με το γινόμενο του εκθέτη της δύναμης επί τον λογάριθμο της βάσης της δύναμης.

$$\forall\, \theta \in \mathrm{R}^+,\ 0 < \alpha \neq 1,\quad \log_\alpha\theta^\mu = \mu.\log_\alpha\theta$$

Ο λογάριθμος μιας ρίζας με θετικό υπόρριζο είναι ίσος με το πηλίκο του λογαρίθμου του υπορρίζου προς τον δείκτη της ρίζας.

$$\forall\, \theta \in \mathrm{R}^+,\ \nu \in \mathrm{N},\ 0 < \alpha \neq 1,\quad \log_\alpha \sqrt[n]{q} = \frac{1}{n}.\log_\alpha\theta$$

Αν οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και $\neq 1$, τότε ισχύει :

$$\boxed{\log_{\beta}\theta = \frac{\log_a q}{\log_a b}}$$

Ο παραπάνω τύπος είναι γνωστός σαν ***τύπος αλλαγής βάσης***.

Άλλοι χρήσιμοι τύποι είναι και οι εξής :

$$\boxed{\log_{\alpha}\beta .\ \log_{\beta}\alpha = 1}$$

$$\boxed{\log_{\beta}\theta = \log_{\beta}\alpha .\ \log_{\alpha}\theta}$$

Ο αριθμός $\log_{\beta}\alpha$ αποκαλείται ***σταθερά της αλλαγής βάσης*** ή ***πολλαπλασιαστής*** του συστήματος βάσης α ως προς το σύστημα βάσης β, καθώς με τη βοήθειά του μπορούμε να βρίσκουμε τους λογαρίθμους αριθμών σε μια άλλη βάση.

Η σχέση μεταξύ δεκαδικών και νεπέρειων λογαρίθμων είναι η εξής :

$$\boxed{\begin{array}{c} \log\theta = \log e . \ln\theta, \text{ όπου } \log e = 0{,}43429... \\ \ln\theta = 2{,}30258.\log\theta \\ \log\theta = 0{,}43429.\ln\theta \end{array}}$$

Αν οι αριθμοί α και β είναι θετικοί, το $\alpha \neq 1$ και ο αριθμός $\rho \in R$ και $\rho \neq 0$, τότε ισχύει :

$$\boxed{\log_{\alpha^{\rho}}\theta = \frac{1}{r}.\log_{\alpha}\theta}$$

Αν $\alpha, \theta_1, \theta_2 \in R^+$ και $\alpha \neq 1$, τότε ισχύουν τα εξής :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Αν } \alpha>1, \text{ τότε } \log_{\alpha}\theta_1 > \log_{\alpha}\theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 > \theta_2 \ \text{(γνησίως αύξουσα)} \\ \text{Αν } \alpha<1, \text{ τότε } \log_{\alpha}\theta_1 > \log_{\alpha}\theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 < \theta_2 \ \text{(γνησίως φθίνουσα)} \end{array}}$$

Αν $\alpha, \theta \in R^+$ και $\alpha \neq 1$, τότε ισχύουν τα εξής :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Αν } \alpha>1, \text{ τότε } \log_{\alpha}\theta > 0 \text{ αν } \theta>1 \\ \text{Αν } \alpha>1, \text{ τότε } \log_{\alpha}\theta < 0 \text{ αν } \theta<1 \\ \text{Αν } \alpha<1, \text{ τότε } \log_{\alpha}\theta < 0 \text{ αν } \theta>1 \\ \text{Αν } \alpha<1, \text{ τότε } \log_{\alpha}\theta > 0 \text{ αν } \theta<1 \end{array}}$$

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εκθετική εξίσωση αποκαλείται κάθε εξίσωση όπου σ' ένα τουλάχιστον από τα μέλη της εμφανίζεται ο άγνωστος x ή κάποια συνάρτηση του αγνώστου σε εκθέτη δύναμης με βάση θετικό αριθμό.

Παραδείγματα εκθετικών εξισώσεων είναι τα εξής :

$$2^x = 32,\ 4^{x^2+2x-6} = 16,\ (5x + 1)^{3x} = 1$$

Ακολουθούν οι πιο συνηθισμένες μορφές εκθετικών εξισώσεων και οι τρόποι επίλυσής τους.

1. Εκθετικές εξισώσεις της μορφής : $\boxed{\alpha^x = \beta}$

όπου $\alpha, \beta \in R^+$ και $\alpha \neq 1$.

Για να λύσουμε μια τέτοια εκθετική εξίσωση, αν ο β μπορεί να γραφεί σαν μια δύναμη του α, θέτουμε $\beta = \alpha^k$ και μετά έχουμε $\alpha^x = \alpha^k$, οπότε $x = k$.

Στην περίπτωση που ο β δεν μπορεί να γραφεί σαν μια δύναμη του α, παίρνουμε τους λογαρίθμους και των δύο μελών της εξίσωσης και έχουμε :

$$x.\log\alpha = \log\beta \Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

2. Εκθετικές εξισώσεις της μορφής : $\boxed{\alpha^{f(x)} = \beta}$

όπου $\alpha, \beta \in R^+$ και $\alpha \neq 1$, ενώ η f(x) είναι πραγματική συνάρτηση του x.

Για να λύσουμε μια τέτοια εκθετική εξίσωση, αν ο β μπορεί να γραφεί σαν μια δύναμη του α, θέτουμε $\beta = \alpha^k$ και μετά έχουμε $\alpha^{f(x)} = \alpha^k$, οπότε $f(x) = k$.

Στην περίπτωση που ο β δεν μπορεί να γραφεί σαν μια δύναμη του α, παίρνουμε τους λογαρίθμους και των δύο μελών της εξίσωσης και έχουμε :

$$f(x).\log\alpha = \log\beta \Rightarrow f(x) = \frac{\log b}{\log a}$$

3. Εκθετικές εξισώσεις της μορφής : $\boxed{\alpha^{f(x)} = \alpha^{g(x)}}$

όπου $\alpha \in R^+$ και $\alpha \neq 1$, ενώ οι f(x) και g(x) είναι πραγματικές συναρτήσεις του x.

Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

4. Εκθετικές εξισώσεις της μορφής : $\boxed{\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}}$

όπου α, $\beta \in R^+$ και $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, ενώ οι f(x) και g(x) είναι πραγματικές συναρτήσεις του x.

Αν ο β μπορεί να γραφεί σαν μια δύναμη του α, έχουμε εκθετική εξίσωση της προηγούμενης μορφής. Στην περίπτωση που ο β δεν μπορεί να γραφεί σαν μια δύναμη του α, παίρνουμε τους λογαρίθμους ως προς α και των δύο μελών της εξίσωσης και έχουμε :

$$f(x) = g(x).\log_\alpha\beta$$

5. Εκθετικές εξισώσεις της μορφής : $\boxed{f(\alpha^x) = g(\alpha^x)}$

όπου $\alpha \in R^+$ και $\alpha \neq 1$.

Θέτουμε όπου $\alpha^x = y$, οπότε λύνουμε μια εξίσωση ως προς y και κάνουμε διερεύνηση για να δούμε ποιες τιμές του y θα κάνουμε αποδεκτές, καθότι $\alpha^x > 0 \ \forall x \in R$.

6. Εκθετικές εξισώσεις της μορφής : $\boxed{f(\alpha^x) = g(\beta^x)}$

όπου α, $\beta \in R^+$ και $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, $\alpha \neq \beta$.

Συνήθως είναι βολικό να θέσουμε όπου $\left(\frac{a}{b}\right)^x$ = y, οπότε λύνουμε μια εξίσωση ως προς y και κάνουμε διερεύνηση για να δούμε ποιες τιμές του y θα κάνουμε αποδεκτές, καθότι $\alpha^x > 0$ και $\beta^x > 0 \ \forall x \in R$.

7. Εκθετικές εξισώσεις της μορφής : $\boxed{A.\alpha^x + B.\beta^x = \Gamma}$

όπου α, $\beta \in R^+$ και $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ και $\alpha\beta = 1$.

Θέτουμε όπου $\alpha^x = y$ και όπου $\beta^x = \frac{1}{y}$, οπότε λύνουμε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς y και κάνουμε διερεύνηση για να δούμε ποιες τιμές του y θα κάνουμε αποδεκτές, καθότι $\alpha^x > 0$ και $\beta^x > 0 \ \forall x \in R$.

8. Εκθετικές εξισώσεις της μορφής : $\boxed{f(x)^{g(x)} = 1}$

όπου f(x) και g(x) είναι πραγματικές συναρτήσεις του x και f(x)>0.

Εδώ έχουμε δύο ομάδες λύσεων :

α. f(x) = 1 και

β. g(x) = 0 και f(x)>0.

9. Εκθετικές εξισώσεις της μορφής : $\boxed{f(x)^{f(x)} = \beta}$

όπου f(x) είναι πραγματική συνάρτηση του x και f(x)>0.

Η εξίσωση αυτή λύνεται όταν το β μπορεί να πάρει τη μορφή α^α, οπότε f(x)=α.

ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σύστημα εκθετικών εξισώσεων με δύο ή περισσοτέρους αγνώστους, αποκαλείται κάθε σύστημα εξισώσεων, από τις οποίες η μία τουλάχιστον είναι εκθετική.

Δεν υπάρχει κάποιος ενιαίος κανόνας για την επίλυση ενός συστήματος εκθετικών εξισώσεων και αν δεν μπορέσουμε να καταλήξουμε σε εξισώσεις που να περιέχουν δυνάμεις με κοινή βάση, θα πρέπει να λογαριθμίσουμε και τα δύο μέλη των εξισώσεων.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Λογαριθμική εξίσωση αποκαλείται κάθε εξίσωση όπου σ' ένα τουλάχιστον από τα μέλη της υπάρχει ο λογάριθμος του x ή ο λογάριθμος συναρτήσεων του x.

Λογαριθμικό σύστημα εξισώσεων αποκαλείται κάθε σύστημα εξισώσεων στο οποίο μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις του είναι λογαριθμική.

Δεν υπάρχει κάποιος ενιαίος κανόνας για την επίλυση μιας λογαριθμικής εξίσωσης ή ενός συστήματος λογαριθμικών εξισώσεων, αλλά σε γενικές γραμμές προσπαθούμε να καταλήξουμε σε εξισώσεις που να περιέχουν λογαρίθμους και στα δύο μέλη τους ή έναν λογάριθμο και έναν αριθμό, ώστε να απαλλαγούμε έτσι από τους λογαρίθμους και να ασχοληθούμε με γνωστές εξισώσεις ή συστήματα εξισώσεων.

Φυσικά, αν χρειάζεται θα πρέπει να μετατρέψουμε τους λογαρίθμους ώστε να είναι όλοι ως προς την ίδια βάση.

Συνήθως, η επίλυση μιας λογαριθμικής εξίσωσης καταλήγει στην επίλυση εξισώσεων με μια από τις εξής μορφές :

- $\log x = \alpha \Rightarrow x = 10^{\alpha}$
- $\log x = \log \alpha \Rightarrow x = \alpha$ και $\alpha > 0$
- $\log f(x) = \log \alpha \Rightarrow f(x) = \alpha$ και $\alpha > 0$
- $\log f(x) = \log g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ και $g(x) > 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥΣ

1. Να αποδειχθεί ότι $\alpha^{\log\beta} = \beta^{\log\alpha}$.
2. Να αποδειχθεί ότι $\log_\alpha\beta.\log_\beta\gamma.\log_\gamma\alpha = 1$.
3. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με log3 και ο δεύτερος όρος είναι ίσος με log9, να υπολογισθεί το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (Απ. $\Sigma = \frac{n(n+1)}{2}.\log 3$).
4. Να υπολογισθεί το άθροισμα $\log\left(1-\frac{2}{3}\right)+\log\left(1-\frac{2}{5}\right)+\log\left(1-\frac{2}{7}\right)+\ldots +$ $\log\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)$(Απ. $\Sigma = -\log(2\nu+1)$).
5. Να αποδειχθεί ότι $\log_3 4 > \log_{11} 16$.
6. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $5^x = 625$ (Απ. x=4).
7. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $2^x = \frac{11}{13}$ (Απ. $x = \frac{\log 11-\log 13}{\log 2}$).
8. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $4^{x^2+2x-6} = 16$ (Απ. x=2, x=–4).
9. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $3^{2x-6} = 1$ (Απ. x=3).
10. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $6^{3x+4} = 100$ (Απ. $x=\frac{\log\frac{100}{1296}}{3.\log 6}$).
11. Να επιλυθεί και να διερευνηθεί η εκθετική εξίσωση $\alpha^{\beta x} = \gamma$, όπου α, β, $\gamma\in R^+$ και $\alpha\neq 1$, $\beta\neq 1$. (Απ. $x=\frac{1}{\log b}.\log\left(\frac{\log g}{\log a}\right)$ και θα πρέπει α και γ ταυτόχρονα > 1 ή ταυτόχρονα < 1).
12. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $8.2^{x-9} = 2^{-x}$ (Απ. x=–3).
13. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $2^{2x+11} = 8^x$ (Απ. x=11).
14. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $3^{x^2-4} = 5^{2x}$ (Απ. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(\log_3 5)^2+4}$).
15. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $5^{x+1} + 8.5^x = 325$ (Απ. x=2).
16. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $4^{x+1} + 3.2^x = 1$ (Απ. x=–1).
17. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $9^x + 3.3^{2x} = 8.4^x + 2^{2x}$ (Απ. x=1).
18. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $2.9^x + 3.12^x - 2.4^{2x} = 0$ (Απ. $x = \frac{\log 2}{\log 4-\log 3}$).
19. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $2^x - 5.2^{-x} = 4$ (Απ. $x = \frac{\log 5}{\log 2}$).
20. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $(x^2+x+1)^{x^2-6x} = 1$ (Απ. x=0, x=–1, x=6).
21. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $x^x = 27$ (Απ. x=3).
22. Να επιλυθεί η εκθετική εξίσωση $(x^2+2x+2)^{x^2+2x+2} = 3.125$ (Απ. x=1, x=–3).

23. Να επιλυθεί το εκθετικό σύστημα :

$$\begin{aligned} 8^x.2^{y+4} &= 16 \\ 3^x.9^{y-1} &= 27 \end{aligned}$$

(Απ. $x=-1$, $y=3$).

24. Να επιλυθεί το εκθετικό σύστημα :

$$\begin{aligned} 3^x.4^y &= 160 \\ 3^y.4^x &= 90 \end{aligned}$$

(Απ. $x=\dfrac{1}{\log 12}$, $y=\dfrac{1}{\log 12}+2$).

25. Να επιλυθεί η λογαριθμική εξίσωση $\log(8x+2) = \log 3 + \log(x^2-3)$ (Απ. $x=\dfrac{11}{3}$).

26. Να επιλυθεί η λογαριθμική εξίσωση $\dfrac{1}{2}\log x + \log\sqrt{x+10} = 2 + \log\sqrt{x}$ (Απ. $x=9.900$).

27. Να επιλυθεί το λογαριθμικό σύστημα :

$$\begin{aligned} \log x + \log y &= \log 2 \\ 3x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

(Απ. $x=1$, $y=2$ και $x=\dfrac{4}{3}$, $y=\dfrac{3}{2}$).

28. Να επιλυθεί το λογαριθμικό σύστημα :

$$\begin{aligned} \log^2 x + \log^2 y &= 5 \\ \log x + 2\log y &= 4 \end{aligned}$$

(Απ. $x=100$, $y=10$ και $x=10^{\frac{-2}{5}}$, $y=10^{\frac{11}{5}}$).