Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Μια ευθεία μπορεί να ορισθεί είτε από δύο διαφορετικά σημεία ή από ένα σημείο και ένα ***διευθύνον διάνυσμα***, δηλαδή ένα διάνυσμα που είναι παράλληλο με την ευθεία. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο xOψ, ώστε το σημείο αυτό να βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία λέγεται *εξίσωση της ευθείας στο Καρτεσιανό επίπεδο*.

Αν μια ευθεία ορίζεται από ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ και ένα διευθύνον διάνυσμα $\vec{u}(\alpha, \beta)$, τότε ένα σημείο M(x, y) του επιπέδου θα βρίσκεται πάνω στην ευθεία, όταν και μόνο όταν ισχύει :

$$\boxed{\begin{array}{c} x = x_0 + \alpha\lambda \\ y = y_0 + \beta\lambda \\ \text{όπου } (\lambda \in R) \end{array}}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις λέγονται ***παραμετρικές εξισώσεις μιας ευθείας***. Οι αριθμοί α και β καθορίζουν τη διεύθυνση της ευθείας, ενώ το $\vec{u}(\alpha, \beta)$ είναι το αντίστοιχο ***ελεύθερο διάνυσμα***.

Αν μια ευθεία ορίζεται από δύο σημεία $A(x_0, y_0)$ και $B(x_1, y_1)$, τότε οι παραμετρικές εξισώσεις της θα είναι :

$$\boxed{\begin{array}{c} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ \text{όπου } (\lambda \in R) \end{array}}$$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Λέμε ότι ένα σύνολο σημείων αποτελεί ευθεία όταν και μόνο όταν οι συντεταγμένες (x, y) αυτών των σημείων επαληθεύουν μια εξίσωση της παρακάτω μορφής :

$$\boxed{Ax + By + \Gamma = 0, \text{ όπου } A.B \neq 0}$$

Η παραπάνω εξίσωση λέγεται ***γραμμική*** και είναι πρώτου βαθμού ως προς x και y. Επίσης, συμπεραίνουμε ότι το διευθύνον διάνυσμα της ευθείας είναι το $\vec{u}(-B, A)$. Η ευθεία με την παραπάνω εξίσωση συναντά τον άξονα

Οx στο σημείο $\left(-\frac{\Gamma}{\mathrm{A}},0\right)$ *(τετμημένη επί την αρχή)* και τον άξονα Oy στο σημείο $\left(0,-\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}\right)$ *(τεταγμένη επί την αρχή)*. Το διάνυσμα $\vec{u}(-B,A)$ που είναι παράλληλο με την ευθεία έχει συντελεστή κατεύθυνσης $\lambda=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ και ο αριθμός λ αποκαλείται ***συντελεστής κατεύθυνσης*** ή ***κλίση*** της ευθείας. Αν Γ=0, τότε η ευθεία περνάει από την αρχή Ο(0, 0) των αξόνων.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για να κατασκευάσουμε μια ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0, αρκεί να χαράξουμε την ευθεία που περνάει από τα σημεία $\left(-\frac{\Gamma}{\mathrm{A}},0\right)$ και $\left(0,-\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}\right)$.

ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Αν μια ευθεία έχει εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 και θέσουμε $\lambda=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ και $\beta=-\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}$, τότε προκύπτει η εξίσωση y = λx + β, που είναι γνωστή ως ***ανηγμένη μορφή*** της εξίσωσης μιας ευθείας. Η τεταγμένη επί την αρχή θα είναι τώρα το β και ο συντελεστής κατεύθυνσης της ευθείας θα είναι το λ. Αν η ευθεία ορίζεται από δύο σημεία $A_1(x_1, y_1)$ και $A_2(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$, τότε θα ισχύει : $\lambda=\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Η εξίσωση μιας ευθείας που περνάει από ένα σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) και έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό λ, είναι :

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕ ΕΥΘΕΙΕΣ

Η εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία με συντεταγμένες $A_1(x_1, y_1)$ και $A_2(x_2, y_2)$ είναι :

$$\boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και σε μορφή ορίζουσας :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A_1(\alpha, 0)$ και $A_2(0, \beta)$ των αξόνων Ox και Oy είναι :

$$\boxed{\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1}$$

Δύο ευθείες μη παράλληλες με τον άξονα Oy, για να είναι ***παράλληλες*** μεταξύ τους, πρέπει και αρκεί να είναι ίσοι οι συντελεστές διεύθυνσής τους. Αν οι ευθείες έχουν τις εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, τότε η πρώτη ευθεία είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{u}(-B_1, A_1)$ και η δεύτερη ευθεία είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\upsilon}(-B_2, A_2)$, οπότε για να είναι παράλληλα τα διανύσματα, πρέπει :

$$(-B_1).A_2 - (A_1).(-B_2) = 0 \text{ ή } A_1.B_2 - A_2.B_1 = 0 \text{ ή } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ ή } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Αν τις εξισώσεις των δύο ευθειών τις έχουμε γράψει στην ανηγμένη μορφή : $y = \lambda_1x + \beta_1$ και $y = \lambda_2x + \beta_2$, τότε θα πρέπει να ισχύει : $\lambda_1 = \lambda_2$.

Η εξίσωση μιας ευθείας που περνάει από ένα σημείο $A_0(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη με μια ευθεία που έχει εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, είναι :

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$$

Για να ***ταυτίζονται*** δύο ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, πρέπει και αρκεί να είναι ανάλογοι οι ομώνυμοι συντελεστές των εξισώσεων, δηλαδή : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$.

Για να ***τέμνονται*** δύο ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, πρέπει και αρκεί να έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης ή $A_1.B_2 - A_2.B_1 \neq 0$.

ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΡΙΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να τέμνονται τρεις ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ και $A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0$ ή να είναι παράλληλες, είναι η εξής :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

Αν έχουμε δύο ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, οι οποίες τέμνονται σ' ένα σημείο $M(x_1, y_1)$, τότε κάθε ευθεία που περνάει από το σημείο Μ θα έχει εξίσωση της μορφής :

$$\boxed{A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 + k(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0, \text{ όπου } k \in R}$$

Αν θέλουμε τώρα η παραπάνω ευθεία να περνάει και από ένα άλλο σημείο $N(x_2, y_2)$, διάφορο του Μ, δεν έχουμε παρά να βρούμε για ποια τιμή του συντελεστή k επαληθεύεται η παραπάνω εξίσωση για τις συντεταγμένες του σημείου Ν.

ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy, η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}(A,B)$ και κάθε ευθεία που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}(A,B)$ έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$.

Για να ***είναι κάθετες*** δύο ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, πρέπει και αρκεί να ισχύει το εξής :

$$\boxed{A_1.A_2 + B_1.B_2 = 0}$$

Αν οι εξισώσεις των ευθειών είναι γραμμένες στην ανηγμένη μορφή $y = \lambda_1x + \beta_1$ και $y = \lambda_2x + \beta_2$, πρέπει και αρκεί να ισχύει το εξής :

$$\boxed{\lambda_1.\lambda_2 = -1}$$

Η εξίσωση μιας ευθείας που περνάει από ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη σ' ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}(A, B)$, είναι η εξής :

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$$

Η εξίσωση μιας ευθείας που περνάει από ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$, είναι η εξής :

$$\boxed{B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0}$$

Η γωνία φ δύο ευθειών με εξισώσεις στην ανηγμένη μορφή $y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $y = \lambda_2 x + \beta_2$, είναι η εξής : $\varepsilon\varphi\phi = \dfrac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{|1 + \lambda_1\lambda_2|}$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

Η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ από μια ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, είναι η εξής :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Η απόσταση της αρχής $O(0, 0)$ των αξόνων από την παραπάνω ευθεία είναι :

$$d = \frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι τρία σημεία του επιπέδου, τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι το εξής :

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σχηματίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο (–2, 2) και είναι παράλληλη με το διάνυσμα (2, 3). *(Απ. –3x +2y – 10 = 0)*.
2. Να κατασκευάσετε το διευθύνον διάνυσμα της ευθείας x + 2y = 1. *(Απ. (–2, 1))*.
3. Να ορίσετε τις συντεταγμένες επί την αρχή της ευθείας 3x – 4y – 12 = 0. *(Απ. 4 και –3)*.
4. Να σχηματίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο (3, –4) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = –2. *(Απ. 2x + y –2 = 0)*.
5. Να σχηματίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία (1, 2) και (–2, 3). *(Απ. x + 3y –7 = 0)*.
6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία Α(–3, 2), Β(3, –2) και Γ(0, 1). *(Απ.* $y=-\frac{2}{3}x$, *y = – x +1 και* $y=-\frac{1}{3}x+1$*)*.
7. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α(–3, –7), Β(0, –2) και Γ(6, 8) βρίσκονται σε ευθεία. *(Απ.* $y=\frac{5}{3}x-2$*)*.
8. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών 6x –2y – 8 = 0 και 3x + y = 14. *(Απ. x = 3, y = 5)*.
9. Να αποδείξετε ότι η ευθεία 3x + 4y – 2 = 0 είναι παράλληλη με την ευθεία 9x + 12y + 7 = 0 και ταυτίζεται με την ευθεία 15x + 20y – 10 = 0. *(Απ.* $\lambda=-\frac{3}{4}$*)*.
10. Να ορίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από την τομή των ευθειών 2x + 5y – 3 = 0 και 3x – 2y – 1 = 0 καθώς και από την τομή των ευθειών x – y = 0 και x + 3y – 6 = 0. *(Απ. –43x + 35y + 12 = 0)*.
11. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξισώσεις 3x + 4y – 2 = 0 και 8x – 6y + 5 = 0 είναι κάθετες μεταξύ τους. *(Απ.* $\lambda_1=-\frac{3}{4}$ *και* $\lambda_2=\frac{4}{3}$*)*.
12. Να βρεθεί το μ ώστε η απόσταση του σημείου (4, 6) από την ευθεία (μ – 1)x – (2μ – 3)y – 4μ + 1 = 0 να είναι ίση με 3. *(Απ. μ =1)*.
13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που απέχει εξίσου από τις ευθείες 3x + 4y – 5 = 0 και 3x + 4y + 7 = 0. *(Απ. 3x + 4y + 1 = 0)*.