# Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

## ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Μια ευθεία μπορεί να ορισθεί είτε από δύο διαφορετικά σημεία ή από ένα σημείο και ένα ***διευθύνον διάνυσμα***, δηλαδή ένα διάνυσμα που είναι παράλληλο με την ευθεία. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο xOψ, ώστε το σημείο αυτό να βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία λέγεται *εξίσωση της ευθείας στο Καρτεσιανό επίπεδο*.

Αν μια ευθεία ορίζεται από ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ και ένα διευθύνον διάνυσμα $\vec{u}(\alpha,\beta)$, τότε ένα σημείο M(x, y) του επιπέδου θα βρίσκεται πάνω στην ευθεία, όταν και μόνο όταν ισχύει:

$$\boxed{\begin{array}{c} x = x_0 + \alpha\lambda \\ y = y_0 + \beta\lambda \\ \text{όπου } (\lambda \in R) \end{array}}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις λέγονται ***παραμετρικές εξισώσεις μιας ευθείας***. Οι αριθμοί α και β καθορίζουν τη διεύθυνση της ευθείας, ενώ το $\vec{u}(\alpha,\beta)$ είναι το αντίστοιχο ***ελεύθερο διάνυσμα***.

Αν μια ευθεία ορίζεται από δύο σημεία $A(x_0, y_0)$ και $B(x_1, y_1)$, τότε οι παραμετρικές εξισώσεις της θα είναι:

$$\boxed{\begin{array}{c} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ \text{όπου } (\lambda \in R) \end{array}}$$

## Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Λέμε ότι ένα σύνολο σημείων αποτελεί ευθεία όταν και μόνο όταν οι συντεταγμένες (x, y) αυτών των σημείων επαληθεύουν μια εξίσωση της παρακάτω μορφής:

$$\boxed{Ax + By + \Gamma = 0, \text{ όπου } A.B \neq 0}$$

Η παραπάνω εξίσωση λέγεται ***γραμμική*** και είναι πρώτου βαθμού ως προς x και y. Επίσης, συμπεραίνουμε ότι το διευθύνον διάνυσμα της ευθείας είναι το $\vec{u}(-B,A)$. Η ευθεία με την παραπάνω εξίσωση συναντά τον άξονα

Οx στο σημείο $\left(-\frac{Γ}{Α},0\right)$ *(τετμημένη επί την αρχή)* και τον άξονα Oy στο σημείο $\left(0,-\frac{Γ}{Β}\right)$ *(τεταγμένη επί την αρχή).*

Το διάνυσμα $\vec{u}(-B,A)$ που είναι παράλληλο με την ευθεία έχει συντελεστή κατεύθυνσης $\lambda=-\frac{Α}{Β}$ και ο αριθμός λ αποκαλείται ***συντελεστής κατεύθυνσης*** ή ***κλίση*** της ευθείας. Αν Γ=0, τότε η ευθεία περνάει από την αρχή Ο(0, 0) των αξόνων.

Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0, όπου $Α \neq 0$ ή $Β \neq 0$, είναι παράλληλη προς το διάνυσμα (-Β, Α) και κάθετη προς το διάνυσμα (Α, Β).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για να κατασκευάσουμε μια ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0, αρκεί να χαράξουμε την ευθεία που περνάει από τα σημεία $\left(-\frac{Γ}{Α},0\right)$ και $\left(0,-\frac{Γ}{Β}\right)$.

# ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Αν μια ευθεία έχει εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 και θέσουμε $\lambda=-\frac{Α}{Β}$ και $\beta=-\frac{Γ}{Β}$, τότε προκύπτει η εξίσωση y = λx + β, που είναι γνωστή ως ***ανηγμένη μορφή*** της εξίσωσης μιας ευθείας. Η τεταγμένη επί την αρχή θα είναι τώρα το β και ο συντελεστής κατεύθυνσης της ευθείας θα είναι το λ. Αν η ευθεία ορίζεται από δύο σημεία $Α_1(x_1, y_1)$ και $Α_2(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$, τότε θα ισχύει: $\lambda=\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Η εξίσωση μιας ευθείας που περνάει από ένα σημείο με συντεταγμένες $(x_1, y_1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό λ, είναι:

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$

Η εξίσωση μιας ευθείας που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, β) και έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό λ, είναι:

$$y = \lambda x + \beta$$

# ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕ ΕΥΘΕΙΕΣ

Η εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία με συντεταγμένες $A_1(x_1, y_1)$ και $A_2(x_2, y_2)$ είναι:

$$\boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και σε μορφή ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A_1(\alpha, 0)$ και $A_2(0, \beta)$ των αξόνων Οx και Οy είναι:

$$\boxed{\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1}$$

Δύο ευθείες μη παράλληλες με τον άξονα Οy, για να είναι ***παράλληλες*** μεταξύ τους, πρέπει και αρκεί να είναι ίσοι οι συντελεστές διεύθυνσής τους. Αν οι ευθείες έχουν τις εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, τότε η πρώτη ευθεία είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{u}(-B_1, A_1)$ και η δεύτερη ευθεία είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\upsilon}(-B_2, A_2)$, οπότε για να είναι παράλληλα τα διανύσματα, πρέπει:

$$(-B_1).A_2 - (A_1).(-B_2) = 0 \text{ ή } A_1.B_2 - A_2.B_1 = 0 \text{ ή } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \text{ ή } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$$

Αν τις εξισώσεις των δύο ευθειών τις έχουμε γράψει στην ανηγμένη μορφή $y = \lambda_1x + \beta_1$ και $y = \lambda_2x + \beta_2$, τότε θα πρέπει να ισχύει $\lambda_1 = \lambda_2$.

Η εξίσωση μιας ευθείας που περνάει από ένα σημείο $A_0(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη με μια ευθεία που έχει εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, είναι:

$$\boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0}$$

Για να ***ταυτίζονται*** δύο ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, πρέπει και αρκεί να είναι ανάλογοι οι ομώνυμοι συντελεστές των εξισώσεων, δηλαδή: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$.

Για να ***τέμνονται*** δύο ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, πρέπει και αρκεί να έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης ή $A_1.B_2 - A_2.B_1 \neq 0$.

# ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΡΙΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να τέμνονται τρεις ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ και $A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0$ ή να είναι παράλληλες, είναι η εξής:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

# ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΤΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να βρίσκονται στην ίδια ευθεία τρία σημεία $A(x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι η εξής:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

# ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

Αν έχουμε δύο ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, οι οποίες τέμνονται σ' ένα σημείο $M(x_1, y_1)$, τότε κάθε ευθεία που περνάει από το σημείο Μ θα έχει εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 + k(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0, \text{ όπου } k \in R}$$

Αν θέλουμε τώρα η παραπάνω ευθεία να περνάει και από ένα άλλο σημείο $N(x_2, y_2)$, διάφορο του Μ, δεν έχουμε παρά να βρούμε για ποια τιμή του συντελεστή k επαληθεύεται η παραπάνω εξίσωση για τις συντεταγμένες του σημείου Ν.

# ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy, η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ και κάθε ευθεία που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ έχει εξίσωση της μορφής Αx + Βy + Γ = 0.

Για να ***είναι κάθετες*** δύο ευθείες με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, πρέπει και αρκεί να ισχύει το εξής:

$$\boxed{A_1.A_2 + B_1.B_2 = 0}$$

Αν οι εξισώσεις των ευθειών είναι γραμμένες στην ανηγμένη μορφή $y = \lambda_1x + \beta_1$ και $y = \lambda_2x + \beta_2$, πρέπει και αρκεί να ισχύει το εξής:

$$\boxed{\lambda_1.\lambda_2 = -1}$$

Η εξίσωση μιας ευθείας που περνάει από ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη σ' ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}(\mathrm{A},\mathrm{B})$, είναι η εξής:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0}$$

Η εξίσωση μιας ευθείας που περνάει από ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία Αx + Βy + Γ = 0, είναι η εξής:

$$\boxed{B(x-x_0)-A(y-y_0) = 0}$$

Η γωνία φ δύο ευθειών με εξισώσεις στην ανηγμένη μορφή $y = \lambda_1x + \beta_1$ και $y = \lambda_2x + \beta_2$, είναι η εξής: $\varepsilon\varphi\phi = \dfrac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{|1+\lambda_1\lambda_2|}$

# ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

Η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ από μια ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0, είναι η εξής:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Η απόσταση της αρχής Ο(0, 0) των αξόνων από την παραπάνω ευθεία είναι η εξής:

$$d = \frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

# ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι τρία σημεία του επιπέδου, τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι το εξής:

$$\boxed{(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|}$$

ή και το εξής:

$$\boxed{(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|}$$

# ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Το τριώνυμο $E = \alpha x + \beta y + \gamma$ είναι ίσο με 0 για τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ και είναι ***θετικό*** για κάθε σημείο του ενός ημιεπιπέδου από τα δύο που ορίζει η ευθεία $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ και ***αρνητικό*** για κάθε σημείο του άλλου ημιεπιπέδου.

Για να βρούμε σε ποιο ημιεπίπεδο είναι θετικό το τριώνυμο και ποιο ημιεπίπεδο είναι αρνητικό, δεν έχουμε παρά να εξετάσουμε το πρόσημο της παράστασης στο σημείο (0, 0), δηλ. η παράσταση Ε είναι ομόσημη με το γ στο ημιεπίπεδο που βρίσκεται η αρχή (0, 0) των αξόνων.

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σχηματίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο (–2, 2) και είναι παράλληλη με το διάνυσμα (2, 3). *(Απ. $-3x + 2y - 10 = 0$)*.
2. Να κατασκευάσετε το διευθύνον διάνυσμα της ευθείας x + 2y = 1. *(Απ. (–2, 1))*.
3. Να ορίσετε τις συντεταγμένες επί την αρχή της ευθείας 3x – 4y – 12 = 0. *(Απ. 4 και –3)*.
4. Να σχηματίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο (3, –4) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = –2. *(Απ. $2x + y - 2 = 0$)*.
5. Να σχηματίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία (1, 2) και (–2, 3). *(Απ. $x + 3y - 7 = 0$)*.
6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία Α(–3, 2), Β(3, –2) και Γ(0, 1). *(Απ. $y = -\frac{2}{3}x$, $y = -x + 1$ και $y = -\frac{1}{3}x + 1$)*.
7. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α(–3, –7), Β(0, –2) και Γ(6, 8) βρίσκονται σε ευθεία. *(Απ. $y = \frac{5}{3}x - 2$)*.
8. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών 6x –2y – 8 = 0 και 3x + y = 14. *(Απ. $x = 3$, $y = 5$)*.
9. Να αποδείξετε ότι η ευθεία 3x + 4y – 2 = 0 είναι παράλληλη με την ευθεία 9x + 12y + 7 = 0 και ταυτίζεται με την ευθεία 15x + 20y – 10 = 0. *(Απ. $\lambda = -\frac{3}{4}$)*.
10. Να ορίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από την τομή των ευθειών 2x + 5y – 3 = 0 και 3x – 2y – 1 = 0 καθώς και από την τομή των ευθειών x – y = 0 και x + 3y – 6 = 0. *(Απ. $-43x + 35y + 12 = 0$)*.
11. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξισώσεις 3x + 4y – 2 = 0 και 8x – 6y + 5 = 0 είναι κάθετες μεταξύ τους. *(Απ. $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$ και $\lambda_2 = \frac{4}{3}$)*.
12. Να βρεθεί το μ ώστε η απόσταση του σημείου (4, 6) από την ευθεία (μ – 1)x – (2μ – 3)y – 4μ + 1 = 0 να είναι ίση με 3. *(Απ. $\mu = 1$)*.
13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που απέχει εξίσου από τις ευθείες 3x + 4y – 5 = 0 και 3x + 4y + 7 = 0. *(Απ. $3x + 4y + 1 = 0$)*.