

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Ο ΚΥΚΛΟΣ

Ο κύκλος C με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$, δηλαδή την αρχή των αξόνων, και ακτίνα ρ , έχει την παρακάτω εξίσωση :

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Ο κύκλος με ακτίνα $\rho = 1$ και κέντρο το σημείο $O(0, 0)$, έχει την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ και λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**. Οι εξισώσεις $x = \rho \cos \varphi$ και $y = \rho \sin \varphi$, όπου $\varphi \in [0, 2\pi)$, λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** του κύκλου C .

Η εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου C με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$, στο σημείο $A(x_1, y_1)$, είναι η εξής :

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

Ο κύκλος C με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ , έχει την παρακάτω εξίσωση :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου C με εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$, στο σημείο $A(x_1, y_1)$, είναι η εξής :

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Αν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, τότε ισχύουν τα εξής :

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη και δεν υπάρχουν σημεία του επιπέδου οι συντεταγμένες των οποίων να την επαληθεύουν.

Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Αποκαλείται **παραβολή** με **εστία** ένα σημείο E και **διευθετούσα** μια ευθεία δ , ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από την εστία E και την ευθεία δ . Αν A είναι η προβολή της εστίας E στην δ , τότε το μέσο K του ευθύγραμμου τμήματος EA είναι σημείο της παραβολής και λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

Η εξίσωση μιας παραβολής σ' ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy , όπου η αρχή $O(0, 0)$ είναι η κορυφή της παραβολής και ο άξονας $x'x$ είναι η κάθετη από την εστία $E = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ στην διευθετούσα $\delta : x = -\frac{p}{2}$, είναι η εξής :

$$y^2 = 2px$$

Ο αριθμός p λέγεται **παράμετρος** της παραβολής και η απόλυτη τιμή του παριστάνει την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα. Κάθε παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η διευθετούσα δ και η εστία E . Η κάθετη από την εστία στην διευθετούσα είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται **άξονας** της παραβολής.

Η εξίσωση της εφαπτομένης μιας παραβολής σ' ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι η εξής :

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Ανακλαστική Ιδιότητα της Παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής σ' ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t , που είναι παράλληλη με τον άξονα της παραβολής.

Η ΕΛΛΕΙΨΗ

Αποκαλείται **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία E και E' ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία E και E' είναι σταθερό και μεγαλύτερο του τμήματος EE' . Το άθροισμα αυτό συμβολίζεται με $2a$ και η απόσταση των εστιών με 2γ , η οποία αποκαλείται και **εστιακή απόσταση** της έλλειψης. Ισχύει $\gamma < a$.

Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα $2a$, είναι η εξής :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$$

Αν το κέντρο O των συστήματος συντεταγμένων είναι το κέντρο της έλλειψης, τότε οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης και η αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας της έλλειψης.

Η παραπάνω έλλειψη τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-α, 0)$ και $(α, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $(0, -β)$ και $(0, β)$. Τα παραπάνω σημεία λέγονται **κορυφές** της έλλειψης και τα ευθύγραμμο τμήματα με μήκος $2α$ και $2β$, **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** αντίστοιχα.

Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε σημεία της έλλειψης που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της O λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης και αυτή είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από τον μεγάλο άξονα της έλλειψης.

Αποκαλείται **εκκεντρότητα** της έλλειψης και συμβολίζεται με το γράμμα ϵ , ο λόγος $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$.

Ισχύει :

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{ και } \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα μιας έλλειψης, τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη. Αν $\epsilon=0$, τότε η έλλειψη γίνεται κύκλος και αν το ϵ τείνει να γίνει ίσο με 1, τότε η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα. Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα λέγονται **όμοιες**.

Οι **παραμετρικές εξισώσεις** της έλλειψης είναι οι εξής :

$$x = \alpha \cos \varphi, y = \beta \sin \varphi, \text{ όπου } \varphi \in [0, 2\pi)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης μιας έλλειψης σ' ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι η εξής :

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

Ανακλαστική Ιδιότητα της Έλλειψης

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης σ' ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ διχοτομεί τη γωνία $E'M_1E$, όπου E' και E είναι οι εστίες της έλλειψης.

Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Αποκαλείται **υπερβολή** με **εστίες** τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα σημεία E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του τμήματος $E'E$. Την διαφορά αυτή την παριστάνουμε με 2α και την απόσταση των εστιών με 2γ , η οποία αποκαλείται **εστιακή απόσταση** της υπερβολής.

Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και σταθερή διαφορά 2α , είναι η εξής :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$

Μια υπερβολή με την παραπάνω εξίσωση έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ως άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων ως κέντρο συμμετρίας, το οποίο αποκαλείται και **κέντρο** της υπερβολής.

Η παραπάνω υπερβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-\alpha, 0)$ και $(\alpha, 0)$, τα οποία λέγονται **κορυφές** της υπερβολής. Μια υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους και δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

Οι **ασύμπτωτες** της υπερβολής είναι οι παρακάτω ευθείες :

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \text{ και } y = -\frac{\beta}{\alpha}x$$

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου που έχει κορυφές τα σημεία (α, β) , $(\alpha, -\beta)$, $(-\alpha, -\beta)$ και $(-\alpha, \beta)$, το οποίο λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής.

Αποκαλείται **εκκεντρότητα** της υπερβολής και συμβολίζεται με το γράμμα ε , ο λόγος $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$.

Ισχύει :

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{ και } \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Η εκκεντρότητα της υπερβολής προσδιορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της ασυμπτώτου της, δηλαδή χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης και συνεπώς και τη μορφή της ίδιας της υπερβολής. Όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής τόσο πιο επίμηκες γίνεται το ορθογώνιο βάσης της και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Ισοσκελής υπερβολή είναι αυτή στην οποία έχουμε $\alpha = \beta$, οπότε $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης μιας υπερβολής σ' ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι η εξής :

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

Οι υπερβολές με εξισώσεις $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ λέγονται **συζυγείς** και έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες.

Ανακλαστική Ιδιότητα της Υπερβολής

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σ' ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ διχοτομεί τη γωνία $E'M_1E$, όπου E' και E είναι οι εστίες της έλλειψης.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E$

Είδαμε στα προηγούμενα ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{\Gamma}{2}, -\frac{\Delta}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{\Gamma^2 + \Delta^2 - 4E}}{2}$, εφόσον ισχύει $\Gamma^2 + \Delta^2 - 4E > 0$. Στην περίπτωση αυτή βέβαια έχουμε $A = B = 1$.

Στην γενικότερη περίπτωση που έχουμε $A \neq B$, για να δούμε τι παριστάνει η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$, θα πρέπει να δημιουργήσουμε τις δύο παραστάσεις στο τετράγωνο για το x και για το y και να δούμε σε ποια κωνική τομή ταιριάζει το αποτέλεσμα. Αν χρειαστεί, θα πρέπει να κάνουμε και παράλληλη μεταφορά των αξόνων για να τοποθετηθεί η νέα αρχή των αξόνων της κωνικής τομής στο κατάλληλο σημείο.

Ακολουθούν παραδείγματα :

- Η εξίσωση $y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$ μετατρέπεται στη μορφή $(y - 2)^2 = 2.4(x + 1)$ και άρα παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο $(-1, 2)$ και άξονα την ευθεία $y = 2$.
- Η εξίσωση $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ μετατρέπεται στη μορφή $\frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$ και άρα παριστάνει έλλειψη με κέντρο το σημείο $(4, 3)$ και με $\alpha = 3$ (ο μεγάλος άξονας είναι κατακόρυφος), $\beta = 2$ και $\gamma = \sqrt{5}$.

- Η εξίσωση $9x^2 - 16y^2 - 36x - 96y - 252 = 0$ μετατρέπεται στη μορφή $\frac{(x-2)^2}{4^2} - \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$ και άρα παριστάνει υπερβολή με κέντρο το σημείο $(2, -3)$ και με $\alpha = 4$, $\beta = 3$ και $\gamma = 5$.

Στην περίπτωση που έχουμε μια εξίσωση της μορφής $Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + E y + Z = 0$, δηλαδή έχει προστεθεί και ένας όρος με το xy , τότε για να απαλειφθεί το xy , θα πρέπει να κάνουμε στροφή των αξόνων κατά μια γωνία θ , η οποία μπορεί να βρεθεί αν θέσουμε :

$$\begin{aligned}x &= X\cos\theta - Y\sin\theta \\y &= X\sin\theta + Y\cos\theta\end{aligned}$$

Για να απαλλαγούμε από τον όρο xy , θα πρέπει να λύσουμε το παραπάνω σύστημα και να βρούμε την κατάλληλη γωνία θ που να μηδενίζει τον συντελεστή που περιέχει τον όρο xy . Οι άξονες θα πρέπει τότε να στραφούν κατά τη γωνία θ .

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΚΑΙ ΚΩΝΙΚΗΣ ΤΟΜΗΣ

Αν θεωρήσουμε μια ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$ και μια κωνική τομή με εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$, τότε η ευθεία και η κωνική τομή έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, που είναι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος.

Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα, θέτουμε στην δεύτερη εξίσωση όπου $y = ax + \beta$ και έτσι προκύπτει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού, η οποία :

- Αν έχει δύο ρίζες άνισες, τότε η ευθεία και η κωνική τομή τέμνονται.
- Αν έχει δύο ρίζες ίσες ($\Delta = 0$), τότε η ευθεία εφάπτεται της κωνικής τομής.
- Αν δεν έχει καμία πραγματική ρίζα, τότε η ευθεία και η κωνική τομή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που περνάνε από το σημείο $(3, 1)$ και να αποδειχθεί ότι οι εφαπτομένες αυτές είναι κάθετες.
2. Δίνονται οι κύκλοι $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ και $x^2 + (y + 1)^2 = 9$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του πρώτου κύκλου στο σημείο $(5, -1)$ και να αποδειχθεί ότι αυτή η ευθεία εφάπτεται και στον δεύτερο κύκλο.
3. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και περνάει από το σημείο $(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$. (Απ. $x^2 + y^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$).
4. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $ax + by = \alpha^2 + \beta^2$. (Απ. $x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2$).
5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$. (Απ. $y = 2x + 5$ και $y = 2x - 5$).
6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ όταν αυτή είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$. (Απ. $y = -2x + 5$ και $y = -2x - 5$).
7. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$. (Απ. $(-2, 3)$ και 4).
8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ στο σημείο του $(1, -1)$. (Απ. $y = -1$).
9. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία με εξίσωση $\chi\sigma\upsilon\eta\varphi + \gamma\eta\mu\varphi = 4\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\eta\varphi + 4$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$.
10. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων από τα οποία είναι κάθετες μεταξύ τους οι εφαπτομένες προς τον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$. (Απ. $x^2 + y^2 = 2\rho^2$).
11. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία $(-3, 0)$ και $(3, 0)$ είναι σταθερός και ίσος με 2. (Απ. $(x - 5)^2 + y^2 = 16$).
12. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(0, 6)$, $(-1, -1)$ και $(6, 6)$. (Απ. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$).
13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι εφαπτομένη στον κύκλο $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 10$ και παράλληλη με την ευθεία $x - 3y + 5 = 0$. (Απ. $y = \frac{1}{3}x - 6$ και $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$).
14. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$ και παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$. (Απ. $y = x - 2$ και $y = x + 2$).
15. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$ και κάθετη με την ευθεία $y = 2x + 1$. (Απ. $y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}$ και $y = -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$).

16. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$ και διέρχεται από το σημείο $(3, 0)$. (Απ. $y = -2\sqrt{14}x + 6\sqrt{14}$ και $y = 2\sqrt{14}x - 6\sqrt{14}$).
17. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $(1, 0)$ και εφάπτεται στην ευθεία $3x + 4y + 2 = 0$.
18. Να βρεθεί το κέντρο του κύκλου και η ακτίνα του όταν έχει εξίσωση $4x^2 + 4y^2 - 12x + 5 = 0$.
19. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(0, 0)$ και $(8, 0)$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = -2$.
20. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(2, 3)$, $(-2, -1)$ και $(-1, -1)$. (Απ. $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 4 = 0$).
21. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(3, 2)$ και $(1, -2)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $x + y + 1 = 0$.
22. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των κύκλων $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ και $x^2 + (y - 3)^2 = 4$.
23. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ να εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$.
24. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$ να έχουν δύο κοινά σημεία.
25. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$ να μην έχουν κοινά σημεία.
26. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η ευθεία $\lambda x - y + 4 = 0$ να είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.
27. Σε μια παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$, να αποδειχθεί ότι η κορυφή της παραβολής είναι το πλησιέστερο στην εστία σημείο της.
28. Αν M είναι ένα σημείο της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$, να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο EM , όπου E είναι η εστία της παραβολής, εφάπτεται στον άξονα $y'y$.
29. Να αποδειχθεί ότι οι παραβολές με εξισώσεις $y^2 = 2px$ και $x^2 = 2py$ τέμνονται στα σημεία $(0, 0)$ και $(2p, 2p)$.
30. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 6x$ που περνάνε από το σημείο $(0, 1)$.
31. Να αποδειχθεί ότι η παραβολή $y^2 = 2px$ και η ευθεία $y = x$ έχουν δύο κοινά σημεία.
32. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ που είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x - 1$.
33. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x + 1$.
34. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ που διέρχεται από το σημείο $(-2, 1)$.
35. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = px$ και της ευθείας $y = \lambda x + \beta$.
36. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ που είναι κάθετη στην ευθεία $3x + y + 3 = 0$. (Απ. $y = \frac{1}{3}x + 3$).

37. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 4x$ που μπορούμε να φέρουμε από το σημείο $(-2, 1)$. (Απ. $x - 2y + 4 = 0$ και $x + y + 1 = 0$).
38. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -3x + 1$.
39. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$ που είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.
40. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$ που διέρχεται από το σημείο $(0, 4)$.
41. Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των ευθειών $ay = \lambda\beta(\alpha + x)$ και $\lambda ay = \beta(\alpha - x)$, όπου $0 < \beta < \alpha$, ανήκει στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$.
42. Αν η εφαπτομένη μιας έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $(p, 0)$ και $(0, q)$, να αποδειχθεί ότι $\frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{q^2} = 1$.
43. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ που περνάνε από το σημείο $(2, 3)$.
44. Να αποδειχθεί ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda^2} = 1$, όπου $\alpha > \beta$, έχουν τις ίδιες εστίες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
45. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 20$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $4x + y + 4 = 0$.
46. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 20$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x + 4y + 12 = 0$.
47. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 20$ που διέρχονται από το σημείο $(0, 10)$.
48. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ είναι κορυφές τετραγώνου.
49. Για μια έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ να βρεθούν οι συντεταγμένες p και q των σημείων τομής της εφαπτομένης σ' ένα σημείο της έλλειψης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και να αποδειχθεί ότι $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$.

50. Αν d και d' είναι οι αποστάσεις των εστιών της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από μια εφαπτομένης της, να αποδειχθεί ότι ισχύει $dd' = \beta^2$.
51. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και της ευθείας $y = \lambda x + \kappa$.
52. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ και $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ είναι κορυφές τετραγώνου.
53. Για τις ελλείψεις $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ και $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων τους.
54. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που διέρχεται από το σημείο $(4, -1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $x + 4y - 10 = 0$. (Απ. $\alpha^2 = 20$ και $\beta^2 = 5$ ή $\alpha^2 = 80$ και $\beta^2 = \frac{5}{4}$).
55. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} = 1$ και της παραβολής $y^2 = 2px$.
56. Να αποδειχθεί ότι είναι σταθερό το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από τις ασύμπτωτές της. (Απ. $\frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$).
57. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στην κορυφή $(\alpha, 0)$ τέμνει την ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ στο σημείο Γ , να αποδειχθεί ότι ισχύει $(OE) = (O\Gamma)$.
58. Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία που είναι παράλληλη προς μια από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.
59. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ που είναι παράλληλες με την ευθεία $y = x + 1$.
60. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ που είναι κάθετες στην ευθεία $y = -\frac{4}{\sqrt{3}}x$.
61. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ που διέρχονται από το σημείο $(3, 0)$.

62. Αν από ένα σημείο της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τις ασύμπτωτες, να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται είναι σταθερό.
63. Να βρεθεί η εκκεντρότητα μιας υπερβολής της οποίας η ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει γωνία 60° με την ασύμπτωτη $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.
64. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $9x^2 + 25y^2 = 225$.
65. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση κάθε εστίας της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από τις ασύμπτωτές της είναι ίση με β .
66. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $9x^2 - y^2 = 32$ που είναι παράλληλες με την ευθεία $9x + y + 9 = 0$.
67. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $9x^2 - y^2 = 32$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x - 9y + 18 = 0$.
68. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $9x^2 - y^2 = 32$ που διέρχονται από το σημείο $(0, -16)$.
69. Να αποδειχθεί ότι η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$ και η υπερβολή $x^2 - 2y^2 = 2$ έχουν τις ίδιες εστίες και τέμνονται κάθετα, δηλαδή είναι κάθετες οι εφαπτομένες στα σημεία τομής τους.
70. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και της ευθείας $y = \lambda x + \kappa$.
71. Να αποδεχθεί ότι η εφαπτομένη μιας υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σ' ένα σημείο της σχηματίζει με τις ασύμπτωτες της υπερβολής τρίγωνο που έχει εμβαδόν ίσο με το γινόμενο $\alpha\beta$.
72. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{9^2} = 1$ που διέρχονται από το σημείο $(3, 6)$.
73. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ και εφάπτεται στην ευθεία $x - y + 1 = 0$.
74. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σ' ένα σημείο της Μ τέμνει τις ασύμπτωτές της στα σημεία Β και Γ, να αποδειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΒ και ΜΓ έχουν το ίδιο μήκος.
75. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει παραβολή και να βρεθούν η κορυφή και η εστία της : $y^2 + 4y + 8x - 28 = 0$.
76. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει έλλειψη και να βρεθούν το κέντρο, οι κορυφές και η εστία της : $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$.

77. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει υπερβολή και να βρεθούν το κέντρο, οι κορυφές και η εστία της : $2y^2 - 3x^2 - 8y + 6x - 1 = 0$.
78. Να αποδειχθεί ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$, η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ παριστάνει κύκλο και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.
79. Να βρεθούν οι τιμές των λ και $\beta \in \mathbf{R}$, ώστε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ να εφάπτεται και στους δύο κύκλους $x^2 + y^2 = 1$ και $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.
80. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = x + 1$.
81. Να βρεθεί τι παριστάνει η παρακάτω κωνική τομή $x^2 - 3y^2 - 2x - 12y - 12 = 0$.
82. Να βρεθεί τι παριστάνει η παρακάτω κωνική τομή $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$.
83. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει υπερβολή $9x^2 - 13y^2 - 18x - 52y - 160 = 0$.
84. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει παραβολή $x^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.