ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς x λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma \in R \text{ και } \alpha \neq 0.$$

Για να επιλύσουμε την παραπάνω εξίσωση, υπολογίζουμε πρώτα τη διακρίνουσά της $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

$\Delta > 0$	Δύο πραγματικές ρίζες άνισες : $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	Δύο πραγματικές ρίζες ίσες (διπλή ρίζα) : $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Δύο μιγαδικές ρίζες συζυγείς : $x_1 = \frac{-\beta + i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2\alpha}$, $x_2 = \frac{-\beta - i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2\alpha}$

Παρατηρούμε ότι αν οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι, τότε θα είναι $\Delta > 0$ και άρα η εξίσωση θα έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες.

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα και με P το γινόμενο των ριζών μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύει :

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

Ισχύουν ακόμα και τα εξής :

$$\lvert x_1 - x_2 \rvert = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert\alpha\rvert}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{\beta}{\gamma}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 3\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}$$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, όπου α, β, $\gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$ καλείται ***πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού*** και η παράσταση $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***τριώνυμο 2ου βαθμού*** ή και απλά ***τριώνυμο***.

Ανάλογα με το αν η διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ είναι θετική, μηδέν ή αρνητική, το τριώνυμο μπορεί να μετατραπεί αντίστοιχα σε γινόμενο του α επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες ή σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο ή σε γινόμενο του α επί μια θετική παράσταση.

Διακρίνουμε δηλαδή τις εξής περιπτώσεις :

$\Delta>0$	$f(x) = \alpha(x-x_1)(x-x_2) = \alpha\left(x-\left(\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right)$ $=\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right)$
$\Delta=0$	$f(x) = \alpha(x-x_1)^2 = \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
$\Delta<0$	$f(x) = \alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}\right)$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι μια παραβολή που έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω αν $\alpha>0$, ενώ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω αν $\alpha<0$.

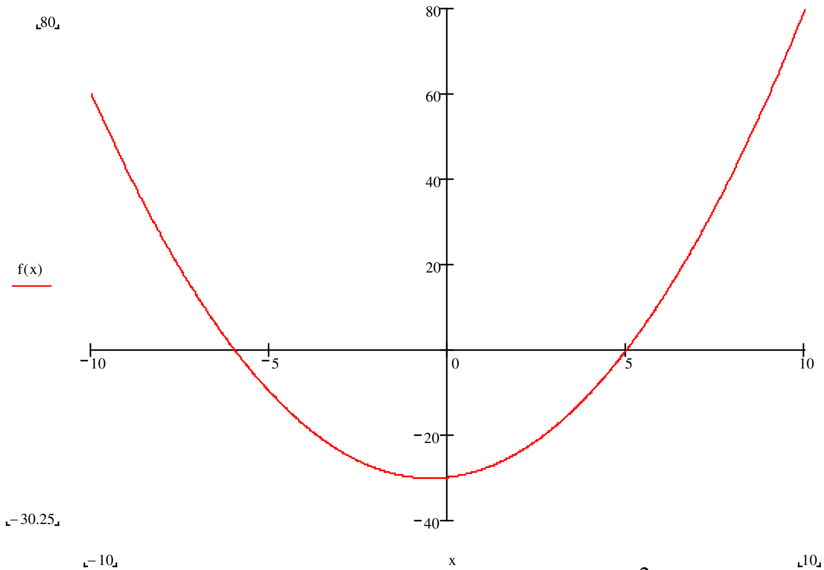
Ακόμη, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ προκύπτει από δύο μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, μιας οριζόντιας κατά $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μονάδες προς τα δεξιά, αν $-\frac{\beta}{2\alpha}>0$ ή κατά $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μονάδες προς τα αριστερά, αν $-\frac{\beta}{2\alpha}<0$ και μιας κατακόρυφης κατά $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ μονάδες προς τα πάνω, αν $-\frac{\Delta}{4\alpha}>0$ ή κατά $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ μονάδες προς τα κάτω, αν $-\frac{\Delta}{4\alpha}<0$.

Ακόμη, αν α>0, τότε η συνάρτηση f(x) = $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty)$ και έχει ελάχιστη τιμή για x=$-\frac{\beta}{2\alpha}$ την $f(-\frac{\beta}{2\alpha})=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

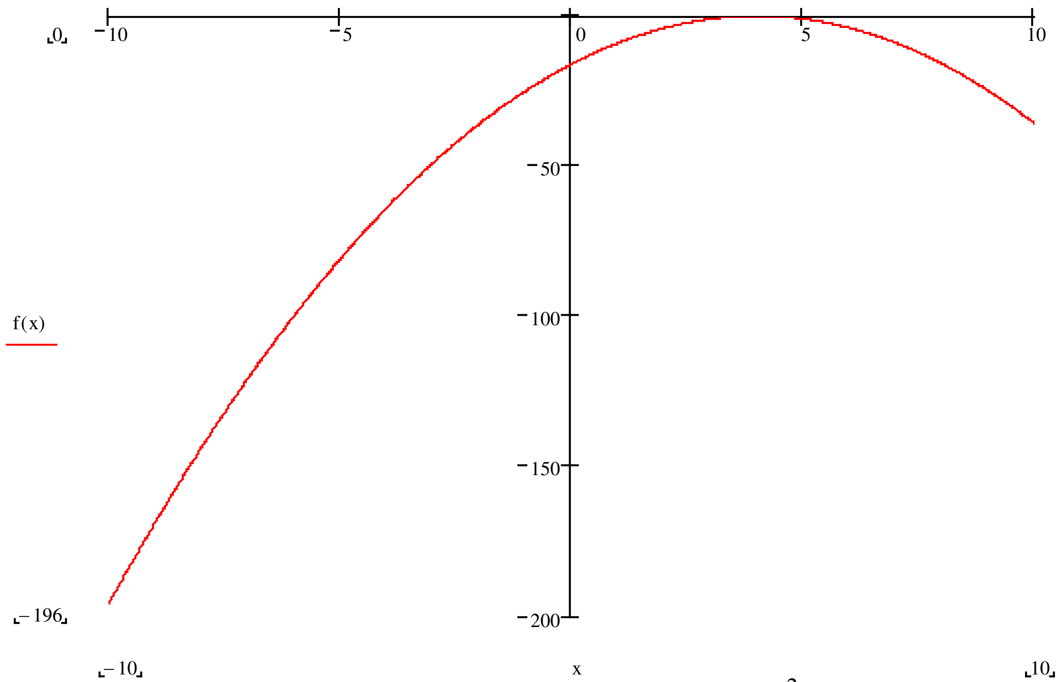
Ακόμη, αν α<0, τότε η συνάρτηση f(x) = $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty)$ και έχει μέγιστη τιμή για x=$-\frac{\beta}{2\alpha}$ την $f(-\frac{\beta}{2\alpha})=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Επίσης, η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0, γ), ενώ αν Δ>0 τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία, που αποτελούν και τις ρίζες της εξίσωσης, αν Δ=0 τέμνει τον άξονα των x σ' ένα σημείο, το $(-\frac{\beta}{2\alpha}$, 0), ή εφάπτεται όπως λέμε, και τέλος αν Δ<0 η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν τέμνει πουθενά τον άξονα των x γιατί το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

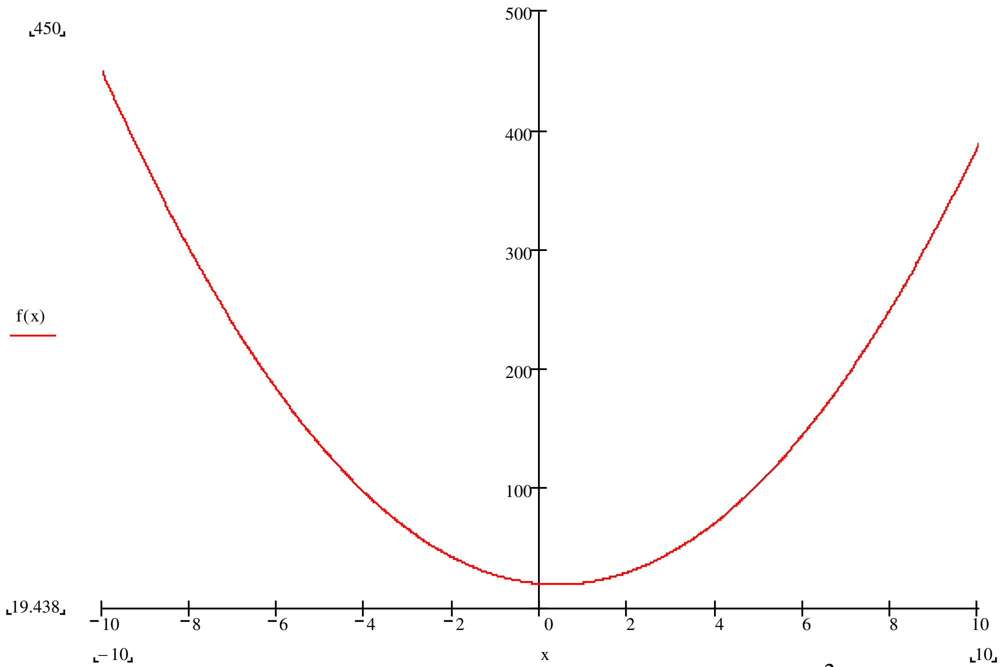
Όσον αφορά το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, αυτό είναι πάντα ομόσημο του α εκτός από την περίπτωση που έχουμε Δ>0, όπου για το διάστημα ανάμεσα στις δύο πραγματικές ρίζες είναι ετερόσημο του α, καθώς και στην περίπτωση που έχουμε Δ>0 ή και Δ=0, όπου είναι ίσο με μηδέν όταν η τιμή του x γίνει ίση με κάποια από τις πραγματικές ρίζες.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+x-30$. Έχει α=1>0, άρα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, έχει Δ=121>0, άρα έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες, τις $x_1=-6$ και $x_2=5$, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-\frac{1}{2}$ και ελάχιστη τιμή για $x=-\frac{1}{2}$ την $f(-\frac{1}{2})=-\frac{121}{4}$. Τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0, –30).



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$-x^2+8x-16$. ΄Εχει α=–1<0, άρα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, έχει Δ=0, άρα έχει μία διπλή πραγματική ρίζα, την $x_1=x_2=4$, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x=4 και μέγιστη τιμή για x=4 την f(4)=0. Εφάπτεται του άξονα των x στο σημείο (4, 0) και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0, –16).



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$2x^2-3x+20$. ΄Εχει α=2>0, άρα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, έχει Δ=–151<0, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες και είναι παντού θετική, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=\frac{3}{4}$ και ελάχιστη τιμή για $x=\frac{3}{4}$ την $f(\frac{3}{4})=\frac{151}{8}$. Τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0, 20).

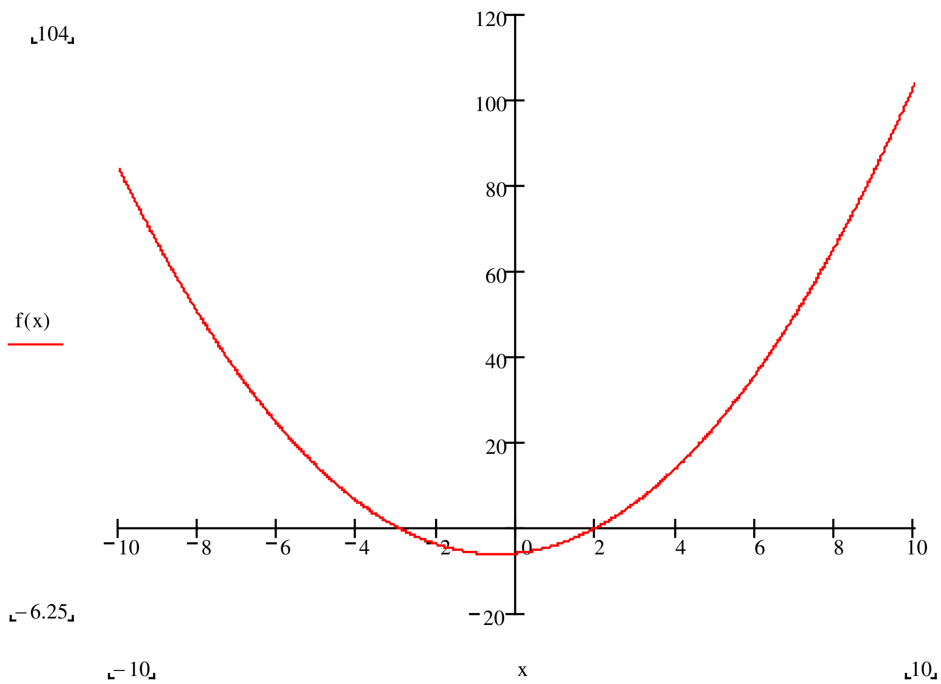
ΟΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ανίσωση δευτέρου βαθμού ως προς x λέγεται κάθε ανίσωση της μορφής :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0 \text{ ή } \alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma \in R \text{ και } \alpha \neq 0.$$

Για να επιλύσουμε τις παραπάνω ανισώσεις, εφαρμόζουμε αυτά που είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους, κάνουμε δηλαδή μελέτη και γραφική παράσταση του αντίστοιχου τριωνύμου και βρίσκουμε ποιες τιμές του x επαληθεύουν την ανίσωση.

Για παράδειγμα, για να λύσουμε τις ανισώσεις $x^2+x-6>0$ και $x^2+x-6\leq 0$, θα πρέπει να κάνουμε πρώτα τη μελέτη και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+x-6$.



Βλέπουμε ότι το τριώνυμο x^2+x-6 έχει ρίζες τους αριθμούς –3 και 2 και έχει $\alpha=1>0$ και $\Delta=25>0$, άρα είναι ετερόσημο του α, δηλαδή αρνητικό, εντός των ριζών και ομόσημο του α, δηλαδή θετικό, σ' όλες τις άλλες περιοχές, εκτός φυσικά από τις τιμές –3 και 2, όπου μηδενίζεται.

Άρα η λύση της ανίσωσης $x^2+x-6>0$ θα είναι η ένωση των ανοικτών διαστημάτων $(-\infty, -3)\cup(2, +\infty)$ και η λύση της ανίσωσης $x^2+x-6\leq 0$ θα είναι το κλειστό διάστημα $[-3, 2]$.

ΘΕΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Για να βρούμε τη θέση ενός πραγματικού αριθμού λ ως προς τις πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, όπου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x_2 \leq x_1$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

Θέση του Αριθμού	**Συνθήκες**
$\lambda < x_2 \leq x_1$ (μικρότερος και από τις δύο ρίζες)	$\Delta \geq 0$, $\alpha f(\lambda) > 0$ και $\lambda < -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$x_2 < \lambda < x_1$ (ανάμεσα στις δύο ρίζες)	$\alpha f(\lambda) < 0$ (εννοείται ότι $\Delta > 0$)
$x_2 \leq x_1 < \lambda$ (μεγαλύτερος και από τις δύο ρίζες)	$\Delta \geq 0$, $\alpha f(\lambda) > 0$ και $\lambda > -\dfrac{\beta}{2\alpha}$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Σχετικά με τις ρίζες μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, χρήσιμες είναι οι εξής παρατηρήσεις :

- Αν $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και η εξίσωση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $\kappa+\lambda i$, όπου $\kappa, \lambda \in R$, τότε η άλλη ρίζα της εξίσωσης θα είναι ο συζυγής μιγαδικός αριθμός $\kappa-\lambda i$.
- Αν $\alpha, \beta, \gamma \in Q$ και η εξίσωση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει ρίζα τον ασύμμετρο πραγματικό αριθμό $\kappa+\sqrt{\lambda}$, όπου $\kappa, \lambda \in Q$ και το λ δεν είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, τότε η άλλη ρίζα της εξίσωσης θα είναι ο συζυγής ασύμμετρος πραγματικός αριθμός $\kappa-\sqrt{\lambda}$.
- Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουν οι εξισώσεις $f_1(x)=\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1=0$ και $f_2(x)=\alpha_2 x^2+\beta_2 x+\gamma_2=0$ ρίζες ίσες, είναι η :
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$
- Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουν οι εξισώσεις $f_1(x)=\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1=0$ και $f_2(x)=\alpha_2 x^2+\beta_2 x+\gamma_2=0$ ρίζες ανάλογες με λόγο λ, είναι η : $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\dfrac{\beta_1}{\beta_2\lambda}=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2\lambda^2}$
- Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουν οι εξισώσεις $f_1(x)=\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1=0$ και $f_2(x)=\alpha_2 x^2+\beta_2 x+\gamma_2=0$ ρίζες αντίθετες, είναι η : $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=-\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$
- Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουν οι εξισώσεις $f_1(x)=\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1=0$ και $f_2(x)=\alpha_2 x^2+\beta_2 x+\gamma_2=0$ ρίζες αντίστροφες, είναι η : $\dfrac{\alpha_1}{\gamma_2}=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\dfrac{\gamma_1}{\alpha_2}$

ΟΙ ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διτετράγωνη εξίσωση ως προς x λέγεται κάθε εξίσωση 4ου βαθμού της μορφής :

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma \in R \text{ και } \alpha \neq 0.$$

Η παράσταση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ καλείται ***διτετράγωνο τριώνυμο***.

Για να επιλύσουμε την παραπάνω εξίσωση, θέτουμε όπου $x^2=y$ και έχουμε έτσι να επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$, η οποία καλείται ***επιλύουσα*** της διτετράγωνης εξίσωσης. Η επιλύουσα θα έχει δύο ρίζες, έστω τις y_1 και y_2, οι οποίες θα είναι πραγματικές ή καθαρές μιγαδικές συζυγείς.

Θα έχουμε έτσι να λύσουμε τις εξισώσεις $x^2=y_1$ και $x^2=y_2$, οι οποίες δίνουν τέσσερις ρίζες, ανά δύο αντίθετες, που μπορεί να είναι πραγματικές (π.χ. 2, –2, 3, –3) ή καθαρές μιγαδικές (π.χ. 2+3i, –2–3i, 2–3i, –2+3i) ή και φανταστικές (5i, –5i, 6i –6i) ή και συνδυασμοί των ανωτέρω (π.χ. 4, –4, $\sqrt{7}\,i$, –$\sqrt{7}\,i$) .

Για να διερευνήσουμε την παραπάνω εξίσωση, υπολογίζουμε πρώτα τη διακρίνουσά της $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ και έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

$\Delta>0$	Δύο πραγματικές ρίζες άνισες για την επιλύουσα και άρα τέσσερις ρίζες για την διτετράγωνη, οι οποίες θα είναι ή οι δύο πραγματικές και αντίθετες και οι άλλες δύο φανταστικές και αντίθετες ή όλες πραγματικές (πάντα ανά δύο αντίθετες) ή όλες φανταστικές (πάντα ανά δύο αντίθετες).
$\Delta=0$	Δύο πραγματικές ρίζες ίσες (διπλή ρίζα) για την επιλύουσα και άρα τέσσερις ρίζες για την διτετράγωνη, όπου οι δύο είναι ίσες μεταξύ τους και αντίθετες με τις άλλες δύο και όλες είναι ή πραγματικές ή φανταστικές.
$\Delta<0$	Δύο καθαρές μιγαδικές ρίζες συζυγείς για την επιλύουσα και άρα τέσσερις ρίζες για την διτετράγωνη, οι οποίες θα είναι όλες καθαρές μιγαδικές, ανά δύο αντίθετες και ανά δύο συζυγείς.

Ακολουθούν παραδείγματα :

Διτετράγωνη εξίσωση : x^4-13x^2-48 Ρίζες επιλύουσας : 16, –3 Ρίζες διτετράγωνης : 4, –4, $\sqrt{3}\,i$, $-\sqrt{3}\,i$	Διτετράγωνη εξίσωση : x^4-10x^2+25 Ρίζες επιλύουσας : 5, 5 Ρίζες διτετράγωνης: $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$
Διτετράγωνη εξίσωση : x^4-5x^2+6 Ρίζες επιλύουσας : 2, 3 Ρίζες διτετράγωνης : $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$	Διτετράγωνη εξίσωση : x^4+10x^2+169 Ρίζες επιλύουσας : –5+12i, –5–12i Ρίζες διτετράγωνης : 2+3i, 2–3i, –2–3i, –2+3i

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΙΠΛΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

Διπλό τετραγωνικό ριζικό ονομάζεται μια παράσταση που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή $\pm\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$, όπου α, $\beta \in Q^+$, το β δεν είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού και ισχύει $\alpha^2 - \beta > 0$.

Τέτοιες παραστάσεις είναι πολύ πιθανό να συναντήσουμε κατά την επίλυση μιας διτετράγωνης εξίσωσης με συντελεστές ρητούς αριθμούς, όταν φυσικά η διακρίνουσα της επιλύουσας δεν αποτελεί τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Μπορούμε να απλοποιήσουμε ένα διπλό τετραγωνικό ριζικό και να το μετασχηματίσουμε σ' ένα ισοδύναμο απλό ριζικό της μορφής $\sqrt{\delta} \pm \sqrt{\varepsilon}$, όταν και μόνο όταν υπάρχει ένας ρητός αριθμός γ, ώστε να ισχύει : $\alpha^2 - \beta = \gamma^2$.

Σ' αυτήν την περίπτωση, η παράσταση $\pm\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$ μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$\pm\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}} = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha + |\gamma|}{2}} \pm \sqrt{\frac{\alpha - |\gamma|}{2}}\right)$$

ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Αντίστροφη εξίσωση ως προς x λέγεται κάθε εξίσωση που αν έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \neq \pm 1$ και $\rho \neq 0$, θα έχει ως ρίζα και τον αντίστροφό του, δηλ. τον αριθμό $\frac{1}{\rho}$. Αυτό σημαίνει πρακτικά, ότι αν θέσουμε σε μια αντίστροφη εξίσωση όπου x το $\frac{1}{x}$, η εξίσωση δεν θα μεταβληθεί.

Αποδεικνύεται ότι μια εξίσωση είναι αντίστροφη όταν και μόνο όταν είναι ίσοι ή αντίθετοι οι συντελεστές των όρων της οι οποίοι ισαπέχουν από τα άκρα.

Η επίλυση μιας αντίστροφης εξίσωσης $3^{ου}$, $4^{ου}$ και $5^{ου}$ βαθμού αποδεικνύεται ότι στις περισσότερες περιπτώσεις ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, ενώ η επίλυση μιας αντίστροφης εξίσωσης μεγαλυτέρου του $5^{ου}$ βαθμού δεν μπορεί γενικά να αναχθεί στην επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, δεν υπάρχει δηλαδή κάποιος γενικευμένος κανόνας για την επίλυσή της.

Για την επίλυση μιας αντίστροφης εξίσωσης διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Η αντίστροφη εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού με ίσους τους ισαπέχοντες από τα άκρα όρους της, δηλ. της μορφής $αx^3+βx^2+βx+α=0$, όπου $α,β\in R$. Για να τη λύσουμε, βγάζουμε κοινό παράγοντα το $(x+1)$ και έτσι προκύπτει η εξίσωση πρώτου βαθμού $x+1=0$ και μια αντίστροφη εξίσωση δευτέρου βαθμού, η $αx^2+(β–α)x+α=0$, που επιλύεται εύκολα.
2. Η αντίστροφη εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού με αντίθετους τους ισαπέχοντες από τα άκρα όρους της, δηλ. της μορφής $αx^3+βx^2–βx–α=0$, όπου $α,β\in R$. Για να τη λύσουμε, βγάζουμε κοινό παράγοντα το $(x–1)$ και έτσι προκύπτει η εξίσωση πρώτου βαθμού $x–1=0$ και μια αντίστροφη εξίσωση δευτέρου βαθμού, η $αx^2+(β+α)x+α=0$, που επιλύεται εύκολα.
3. Η αντίστροφη εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού με αντίθετους τους ισαπέχοντες από τα άκρα όρους της και χωρίς μεσαίο όρο, δηλ. της μορφής $αx^4+βx^3–βx–α=0$, όπου $α,β\in R$. Για να τη λύσουμε, βγάζουμε κοινό παράγοντα το $(x^2–1)$ και έτσι προκύπτει η εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2–1=0$ και μια αντίστροφη εξίσωση δευτέρου βαθμού, η $αx^2+βx+α =0$, που επιλύεται εύκολα.
4. Η αντίστροφη εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού με ίσους τους ισαπέχοντες από τα άκρα όρους της, δηλ. της μορφής $αx^4+βx^3+γx^2+βx+α=0$, όπου $α,β,γ\in R$. Για να τη λύσουμε, διαιρούμε και τα δύο μέλη της με x^2 και στην εξίσωση που θα προκύψει θέτουμε $x+\frac{1}{x}=y$, οπότε θα προκύψει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς y, που καλείται ***επιλύουσα***, με ρίζες y_1 και y_2. Θέτουμε μετά $x+\frac{1}{x}=y_1$ και $x+\frac{1}{x}=y_2$ και προκύπτουν άλλες δύο εξισώσεις δευτέρου βαθμού, που επιλύονται εύκολα και προκύπτουν έτσι οι τέσσερις ρίζες της αντίστροφης εξίσωσης.
5. Η αντίστροφη εξίσωση $5^{ου}$ βαθμού με ίσους τους ισαπέχοντες από τα άκρα όρους της, δηλ. της μορφής $αx^5+βx^4+γx^3+γx^2+βx+α=0$, όπου $α,β,γ\in R$. Για να τη λύσουμε, βγάζουμε κοινό παράγοντα το $(x+1)$ και έτσι προκύπτει η εξίσωση πρώτου βαθμού $x+1=0$ και μια αντίστροφη εξίσωση τετάρτου βαθμού με ίσους τους ισαπέχοντες από τα άκρα όρους της, που επιλύεται εύκολα.
6. Η αντίστροφη εξίσωση $5^{ου}$ βαθμού με αντίθετους τους ισαπέχοντες από τα άκρα όρους της και χωρίς μεσαίο όρο, δηλ. της μορφής $αx^5+βx^4+γx^3–γx^2–βx–α=0$, όπου $α,β,γ\in R$. Για να τη λύσουμε, βγάζουμε κοινό παράγοντα το $(x–1)$ και έτσι προκύπτει η εξίσωση πρώτου βαθμού $x–1=0$ και μια αντίστροφη εξίσωση τετάρτου βαθμού με ίσους τους ισαπέχοντες από τα άκρα όρους της, που επιλύεται εύκολα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση $3x^2+4x-2=0$ (Απ. $x_1=\frac{-2+\sqrt{10}}{3}$, $x_2=\frac{-2-\sqrt{10}}{3}$).
2. Να λυθεί η εξίσωση $x^2-6x+9=0$ (Απ. $x_1=x_2=3$).
3. Να λυθεί η εξίσωση $2x^2+7x+8=0$ (Απ. $x_1=\frac{-7+i\sqrt{15}}{4}$, $x_2=\frac{-7-i\sqrt{15}}{4}$).
4. Να λυθεί η εξίσωση $x^2+|x|-6=0$ (Απ. $x_1=2$, $x_2=-2$).
5. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από τα σημεία (2, 1), (0, 3) και (5, 2) (Απ. $f(x) = \frac{4}{15}x^2-\frac{23}{15}x+3$).
6. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2-x-12$.
7. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2-10x+25$.
8. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2-2x+1$.
9. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -2x^2-2x+1$.
10. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -4x^2+12x-9$.
11. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -4x^2+x-9$.
12. Να λυθεί η ανίσωση $2x^2-7x+3>0$ (Απ. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$).
13. Να λυθεί η ανίσωση $2x^2-7x+3\leq 0$ (Απ. το διάστημα $[\frac{1}{2}, 3]$).
14. Να λυθεί η ανίσωση $x^2-6x+9>0$ (Απ. $R-\{3\}$).
15. Να λυθεί η ανίσωση $x^2-6x+10<0$ (Απ. αδύνατη).
16. Να λυθεί η ανίσωση $-3x^2+2x-7<0$ (Απ. όλο το R).
17. Να λυθεί η ανίσωση $2x^4-7x^2+3>0$ (Απ. $(-\infty,-\sqrt{3}) \cup (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$).
18. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η παραβολή $y=x^2+\lambda x+(\lambda+1)$ να εφάπτεται στον άξονα των x. (Απ. $\lambda=2+2\sqrt{2}$ και $\lambda=2-2\sqrt{2}$).
19. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η παραβολή $y=x^2+\lambda x+(\lambda+1)$ να έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των y. (Απ. $\lambda=0$).
20. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^2+\lambda x+(\lambda+1)$ να έχει ελάχιστη τιμή για $x=1$. (Απ. $\lambda=-2$).
21. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^2+\lambda x+(\lambda+1)$ να έχει ελάχιστη τιμή ίση με –1. (Απ. $\lambda=2+2\sqrt{3}$ και $\lambda=2-2\sqrt{3}$).
22. Να αποδειχθεί ότι το τριώνυμο $-x^2+(\lambda+1)x-3\lambda^2-2$ λαμβάνει αρνητικές τιμές $\forall \lambda\in R$.
23. Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις $f(x)=\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ και $g(x)=\alpha x^2+2\beta\lambda x+\lambda^2\gamma=0$, όπου $\lambda\in R$ και $\lambda\neq 0$, έχουν το ίδιο είδος ριζών.

24. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=x^2-2\lambda x+(\lambda-1)=0$ έχει πραγματικές ρίζες άνισες $\forall\ \lambda\in R$.
25. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η εξίσωση $f(x)=(\lambda-1)x^2-2(\lambda-3)x-(\lambda-3)=0$ να έχει πραγματικές ρίζες (Απ. $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$).
26. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η εξίσωση $f(x)=(\lambda-1)x^2-2(\lambda-3)x-(\lambda-3)=0$ να έχει μιγαδικές ρίζες (Απ. το διάστημα $(2, 3)$).
27. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η εξίσωση $f(x)=(\lambda-2)x^2-2(\lambda+3)x+2(\lambda-9)=0$ να έχει θετικές πραγματικές ρίζες (Απ. το διάστημα $(9, 27]$).
28. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η εξίσωση $f(x)=(\lambda-2)x^2-2(\lambda+3)x+2(\lambda-9)=0$ να έχει αρνητικές πραγματικές ρίζες (Απ. το διάστημα $[1, 2]$).
29. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=-7x^2+2x-3\lambda+2=0$ να βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς –1 και 1 (Απ. το διάστημα $(-1, \frac{5}{7})$).
30. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $0<\gamma<\beta<\alpha$, να αποδειχθεί ότι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς –1 και 1.
31. Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση $\frac{x^2+2x-11}{2x-6}$, όπου $x\in R$ και $x\neq 3$ (Απ. $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$).
32. Να βρεθεί για ποια τιμή του x γίνεται μέγιστο το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x(\alpha-\beta)+4\alpha\beta$ και ποια είναι η μέγιστη αυτή τιμή (Απ. $x=\alpha-\beta$ και $\max=4(\alpha+\beta)^2$).
33. Για ένα οποιοδήποτε τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(-\frac{\beta}{2\alpha}+\lambda)=f(-\frac{\beta}{2\alpha}-\lambda)$, όπου $\lambda\in R$ (είναι η αλγεβρική απόδειξη τού ότι η ευθεία $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ αποτελεί άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης του τριωνύμου).
34. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί β και γ, ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+\beta x+\gamma=0$ να είναι οι ίδιοι οι αριθμοί β και γ (Απ. $\beta=0, \gamma=0$ και $\beta=1, \gamma=-2$).
35. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=x^2+2\alpha x+\beta$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2 και της εξίσωσης $g(x)=x^2+2\gamma x+\delta$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί $x_1+\lambda$, $x_2+\lambda$, να αποδειχθεί ότι ισχύει : $\gamma^2-\delta=\alpha^2-\beta$.
36. Να λυθεί η εξίσωση $3x^4+4x^2-2=0$ (Απ. $x_1=\sqrt{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}}$, $x_2=-\sqrt{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}}$, $x_3=\sqrt{\frac{2+\sqrt{10}}{3}}i$, $x_4=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{10}}{3}}i$).
37. Να λυθεί η εξίσωση $x^4-6x^2+9=0$ (Απ. $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$, $x_4=-\sqrt{3}$).
38. Να λυθεί η εξίσωση $x^4+8x^2+16=0$ (Απ. $x_1=2i$, $x_2=2i$, $x_3=-2i$, $x_4=-2i$).

39. Να λυθεί η εξίσωση $x^4-10x^2+97=0$ (Απ. $x_1=3+\sqrt{2}i$, $x_2=-3-\sqrt{2}i$, $x_3=3-\sqrt{2}i$, $x_4=-3+\sqrt{2}i$).
40. Να μετασχηματισθεί σε απλό ριζικό η παράσταση : $\sqrt{6-\sqrt{11}}$ (Απ. $\frac{\sqrt{22}-\sqrt{2}}{2}$).
41. Να μετασχηματισθεί σε απλό ριζικό η παράσταση : $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ (Απ. $\sqrt{5}+2$).
42. Να λυθεί η εξίσωση $x^4-2(\alpha+\beta)x^2+(\alpha-\beta)^2=0$, όπου α, $\beta \in R^+$ (Απ. $x_1=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, $x_2=-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, $x_3=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, $x_4=-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$).
43. Να λυθεί η εξίσωση $2x^3+4x^2+4x+2=0$ (Απ. $x_1=-1$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $x_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$).
44. Να λυθεί η εξίσωση $3x^3+5x^2-5x-3=0$ (Απ. $x_1=1$, $x_2=\frac{-4+\sqrt{7}}{3}$, $x_3=\frac{-4-\sqrt{7}}{3}$).
45. Να λυθεί η εξίσωση $x^4+2x^3-2x-1=0$ (Απ. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-1$, $x_4=-1$).
46. Να λυθεί η εξίσωση $x^5+3x^4+2x^3-2x^2-3x-1=0$ (Απ. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-1$, $x_4=-1$, $x_5=-1$).
47. Να λυθεί η εξίσωση $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$ (Απ. $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-3$, $x_4=\frac{1}{3}$).
48. Να λυθεί η εξίσωση $x^6+2x^4+2x^2+1=0$ (Απ. $x_1=i$, $x_2=-i$ και οι 4 τετραγωνικές ρίζες των 2 καθαρών μιγαδικών ριζών της εξίσωσης $x^2+x+1=0$).
49. Να λυθεί και διερευνηθεί η εξίσωση $x^3+\lambda x^2+\lambda x+1=0$, όπου $\lambda \in R$ (Απ. Μία σίγουρη λύση η $x=-1$ και ή 2 πραγματικές ρίζες άνισες αν $\lambda<-1$ ή $\lambda>3$ ή δύο καθαρές μιγαδικές ρίζες αν $-1<\lambda<3$ ή δύο πραγματικές ρίζες ίσες αν $\lambda=-1$ ή $\lambda=3$).
50. Να λυθεί η εξίσωση $x^9-x^5+x^4-1=0$ (Απ. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-1$, $x_4=i$, $x_5=-i$ και οι 4 καθαρές μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης $x^5+1=0$).
51. Να λυθεί η εξίσωση $(x-1)^6-9(x-1)^3+8=0$ (Απ. $x_1=3$, $x_2=2$ και 4 καθαρές μιγαδικές ρίζες).
52. Να λυθεί η εξίσωση $5\sqrt{x-3}=\sqrt{x+9}$ (Απ. $x=\frac{7}{2}$).
53. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x}+\sqrt{x+32}=16$ (Απ. $x=49$).
54. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{2x+9}$ (Απ. $x=8$).