ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση πρώτου βαθμού έχει την εξής γενική μορφή :

$$\alpha x + \beta = 0, \text{ όπου } \alpha, \beta \in R$$

Έχουμε διαδοχικά : $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$

Και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

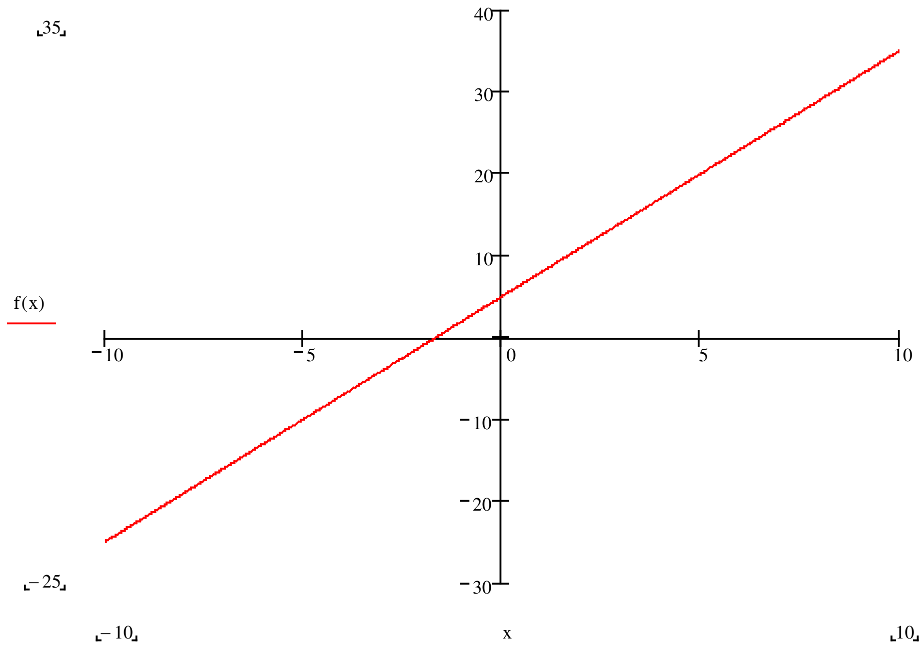
Αν $\alpha \neq 0$	Υπάρχει μία και μοναδική λύση, η $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$
Αν $\alpha=0$ και $\beta \neq 0$	Η εξίσωση είναι αδύνατη στο R
Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$	Η εξίσωση είναι ταυτότητα στο R, δηλ. αληθεύει $\forall x \in R$

Μια εξίσωση πρώτου βαθμού επιδέχεται και γεωμετρική ερμηνεία, αν θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$. Η γραφική αυτή παράσταση αποτελεί ευθεία γραμμή όπως είναι γνωστό και στην ουσία αναζητούμε το ή τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τον οριζόντιο άξονα x'x.

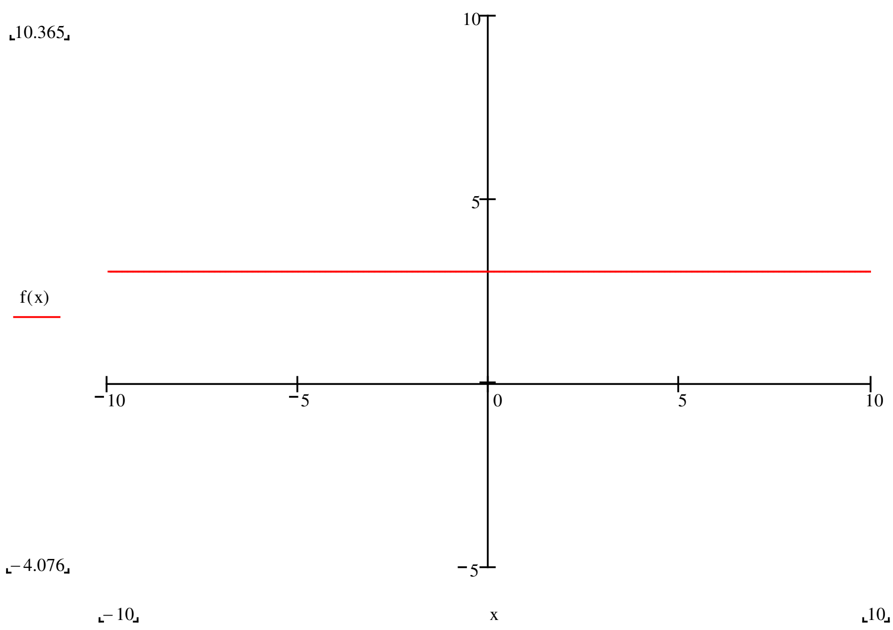
Σύμφωνα με την παραπάνω μελέτη, αν $\alpha \neq 0$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$ τέμνει τον άξονα x'x σ' ένα μόνο σημείο, το οποίο αποτελεί και τη μοναδική λύση της εξίσωσης.

Αν $\alpha=0$ και $\beta \neq 0$, τότε η συνάρτηση γίνεται $y=\beta$ και άρα έχουμε μια ευθεία που είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x και μάλιστα χωρίς να συμπίπτει μαζί του, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο R καθώς η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$ δεν τέμνει πουθενά τον άξονα x'x.

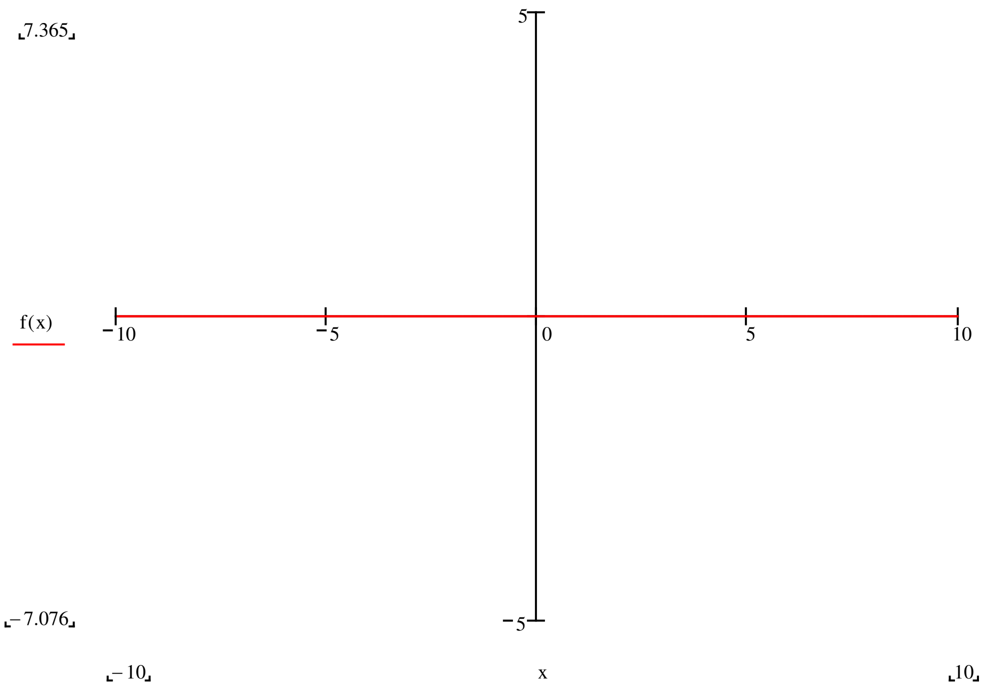
Τέλος, αν $\alpha=0$ και $\beta=0$, τότε η συνάρτηση γίνεται $y=0$ και άρα έχουμε μια ευθεία που συμπίπτει με τον άξονα x'x και άρα η εξίσωση είναι ταυτότητα στο R, δηλ. αληθεύει $\forall x \in R$, καθώς η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$ ταυτίζεται με τον άξονα x'x.



Επίλυση της εξίσωσης 3x+5=0 με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης y=3x+5. Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $x=-\frac{5}{3}$, τιμή που αποτελεί και τη μοναδική λύση της εξίσωσης, και τον άξονα y'y στο σημείο y=5.



Επίλυση της εξίσωσης 0x+3=0 με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης y=3. Η γραφική παράσταση είναι παράλληλη με τον άξονα x'x χωρίς να ταυτίζεται μαζί του και συνεπώς δεν τέμνει πουθενά τον άξονα x'x και έχουμε εξίσωση αδύνατη. Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο y=3.



Επίλυση της εξίσωσης 0x+0=0 με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης y=0. Η γραφική παράσταση ταυτίζεται με τον άξονα x'x και συνεπώς έχουμε εξίσωση αόριστη στο R.

ΟΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Οι ανισώσεις πρώτου βαθμού έχουν μια από τις εξής δύο μορφές :

$$αx + β > 0 \text{ και } αx + β < 0, \text{ όπου } α, β \in R$$

Θα μελετήσουμε πρώτα τη μορφή $αx + β > 0$. Έχουμε διαδοχικά :

$$αx + β > 0 \Leftrightarrow αx > -β$$

Και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

Αν $α>0$	Η ανίσωση επαληθεύεται για $x > -\dfrac{β}{α}$
Αν $α<0$	Η ανίσωση επαληθεύεται για $x < -\dfrac{β}{α}$
Αν $α=0$ και $β>0$	Η εξίσωση είναι ταυτότητα στο R, δηλ. αληθεύει $\forall x \in R$
Αν $α=0$ και $β\leq 0$	Η εξίσωση είναι αδύνατη στο R

Θα μελετήσουμε τώρα τη μορφή $αx + β < 0$. Έχουμε διαδοχικά :

$$αx + β < 0 \Leftrightarrow αx < -β$$

Και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

Αν $α>0$	Η ανίσωση επαληθεύεται για $x < -\dfrac{β}{α}$
Αν $α<0$	Η ανίσωση επαληθεύεται για $x > -\dfrac{β}{α}$
Αν $α=0$ και $β\geq 0$	Η εξίσωση είναι αδύνατη στο R
Αν $α=0$ και $β<0$	Η εξίσωση είναι ταυτότητα στο R, δηλ. αληθεύει $\forall x \in R$

Μια ανίσωση πρώτου βαθμού επιδέχεται και γεωμετρική ερμηνεία, αν θεωρήσουμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και χαράξουμε ένα βέλος προς τη φορά της λύσης, δηλ. προς τα δεξιά αν προκύψει λύση της μορφής $x>α$ και προς τα αριστερά αν προκύψει λύση της μορφής $x<α$.

Η επίλυση ανισώσεων πρώτου βαθμού που έχουν μια από τις εξής δύο μορφές :

$$αx + β \geq 0 \text{ και } αx + β \leq 0, \text{ όπου } α, β \in R$$

είναι παρόμοια με τις μορφές που μελετήσαμε παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-5}{2}+\frac{x+4}{3}=\frac{x+1}{6}+\frac{x-2}{4}$ (Απ. x=2).
2. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-5}{2}+\frac{x+4}{3}=\frac{2x+1}{6}+\frac{2x-2}{4}$ (Απ. αδύνατη).
3. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-5}{2}+\frac{x+4}{3}=\frac{x-2}{3}+\frac{2x-2}{4}$ (Απ. αόριστη).
4. Να διερευνηθεί η εξίσωση $\lambda^2x-3\lambda x=2\lambda-2-2x$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$ (Απ. Αν $\lambda=1$ αόριστη, αν $\lambda=2$ αδύνατη, ενώ για $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq 2$ υπάρχει μία και μοναδική λύση, η $x=\frac{2}{\lambda-2}$).
5. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-3}{2}+\frac{x+1}{5}>9{,}9$ (Απ. x>16).
6. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x+7}{3}-\frac{x+3}{2}>5$ (Απ. x<–25).
7. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $\frac{x+8}{3}+\frac{x+3}{2}>5$ και $\frac{x+2}{5}-\frac{x+2}{2}>-3$ (Απ. x>1 και x<8).
8. Να λυθεί γεωμετρικά η εξίσωση $-4x+7=0$.
9. Να βρεθούν γεωμετρικά οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $\frac{x+8}{3}+\frac{x+3}{2}>5$ και $\frac{x+2}{5}-\frac{x+2}{2}>-3$.
10. Ένα μέρος ενός αρχικού κεφαλαίου 10.000 € τοκίσθηκε σε μια Τράπεζα προς 5% και το άλλος μέρος του τοκίσθηκε σε μια άλλη Τράπεζα προς 10%. Ο συνολικός τόκος που προέκυψε μετά από ένα έτος ήταν 800 €. Να βρεθούν τα ποσά που τοκίσθηκαν σε κάθε Τράπεζα (Απ. 6.000 € προς 10% και 4.000 € προς 5%).