ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Μια συνάρτηση f λέγεται ***παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο*** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό αποκαλείται ***παράγωγος της f στο*** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή ισχύει :

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ισχύει το εξής :

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σ' ένα σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Ο ***συντελεστής διεύθυνσης*** $\lambda = f'(x)$ της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο της $(x_0, f(x_0))$ λέγεται και ***κλίση της γραφικής παράστασης*** της f στο x_0, ή απλά κλίση της f στο x_0.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 και υπάρχουν τα όρια $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

πεπερασμένα ή άπειρα και είναι διαφορετικά, τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ λέγεται ***γωνιακό σημείο*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και στο σημείο αυτό δεν ορίζεται εφαπτομένη της καμπύλης.

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό, ενώ το αντίθετο δεν ισχύει πάντοτε. Επίσης, αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Αν f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, τότε θα λέμε ότι η f είναι ***παραγωγίσιμη*** στο Α, ή απλά παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο που ανήκει στο σύνολο Α. Αντίστοιχοι ορισμοί δίνονται και για ένα ανοικτό ή κλειστό διάστημα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Αν A_1 είναι το υποσύνολο του πεδίου ορισμού Α μιας συνάρτησης f όπου αυτή είναι παραγωγίσιμη, τότε ονομάζουμε ***πρώτη παράγωγο*** ή απλά ***παράγωγο*** της f τη συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$. Η παράγωγος συνάρτηση συμβολίζεται με $f'(x)$ ή και με $\frac{df}{dx}$. Η ***δεύτερη παράγωγος*** μιας συνάρτησης συμβολίζεται με $f''(x)$ ή με $f^{(2)}(x)$ και η ***ν-οστή παράγωγος*** με $f^{(\nu)}(x)$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
- $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$
- $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
- $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$
- $(cf(x))' = cf'(x)$, όπου c σταθερά.
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(f^2(x))' = 2f'(x)f(x)$
- $(f^\nu(x))' = \nu f'(x)f^{\nu-1}(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος Αθροίσματος : $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. Ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

Παράγωγος Γινομένου : $(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει το εξής :
$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

Παράγωγος Πηλίκου : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης : $(f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x)$

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Η απλή περίπτωση του πολύ βασικού για τον Διαφορικό Λογισμό Θεωρήματος της Μέσης Τιμής είναι το ***Θεώρημα του Rolle***, το οποίο διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και ισχύει $f(α) = f(β)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $ξ \in (α, β)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(ξ) = 0$.

Από γεωμετρική άποψη, το παραπάνω Θεώρημα του Rolle μάς λέει ότι για μια συνάρτηση που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα και τα άκρα του διαστήματος έχουν ίσες τεταγμένες, τότε σ' ένα τουλάχιστον σημείο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης για το συγκεκριμένο διάστημα είναι παράλληλη με τον άξονα x'x. Επίσης, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f'.

Το ***Θεώρημα της Μέσης Τιμής*** του Διαφορικού Λογισμού διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $ξ \in (α, β)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α}$.

Από γεωμετρική άποψη, το παραπάνω Θεώρημα της Μέση Τιμής μάς λέει ότι για μια συνάρτηση που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα, σ' ένα τουλάχιστον σημείο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης για το συγκεκριμένο διάστημα είναι παράλληλη της ευθείας που ενώνει τα άκρα του διαστήματος.

Με βάση το Θεώρημα της Μέσης Τιμής αποδεικνύονται τα εξής θεωρήματα :

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα, τότε αν $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή σ' όλο το διάστημα.

Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες και συνεχείς σ' ένα διάστημα, τότε αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού, τότε υπάρχει μια σταθερά τιμή c τέτοια, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c$ σε κάθε σημείο του διαστήματος.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα, τότε αν ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το διάστημα, ενώ αν ισχύει $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σ' όλο το διάστημα. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει πάντα (παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3$).

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$ ***τοπικό μέγιστο***, όταν υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το σημείο x_0 λέγεται ***θέση*** ή ***σημείο τοπικού μεγίστου***, ενώ η τιμή $f(x_0)$ λέγεται ***τοπικό μέγιστο*** της συνάρτησης $f(x)$. Αν η παραπάνω ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο σημείο x_0 ***ολικό μέγιστο*** ή και απλά ***μέγιστο***, την τιμή $f(x_0)$.

Για μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$ ***τοπικό ελάχιστο***, όταν υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το σημείο x_0 λέγεται ***θέση*** ή ***σημείο τοπικού ελαχίστου***, ενώ η τιμή $f(x_0)$ λέγεται ***τοπικό ελάχιστο*** της συνάρτησης $f(x)$. Αν η παραπάνω ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο σημείο x_0 ***ολικό ελάχιστο*** ή και απλά ***ελάχιστο***, την τιμή $f(x_0)$.

Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης αποκαλούνται ***τοπικά ακρότατα*** ή και απλά, ***ακρότατα*** της συνάρτησης, ενώ τα σημεία στα οποία η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται ***θέσεις τοπικών ακροτάτων***. Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται ***ολικά ακρότατα*** αυτής.

Για την μελέτη των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης, χρήσιμο είναι το ***Θεώρημα του Fermat*** : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του Δ, τότε αν η συνάρτηση παρουσιάζει ***τοπικό ακρότατο*** στο x_0 και είναι ***παραγωγίσιμη*** στο σημείο αυτό, τότε ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει πάντα (παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3$ στο σημείο (0, 0)).

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι :

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'.
- Τα άκρα του Δ.

Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος στα οποία μια συνάρτηση δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται ***κρίσιμα σημεία*** της συνάρτησης στο διάστημα αυτό. Ένα σημείο x_0 ονομάζεται ***στάσιμο σημείο*** της συνάρτησης f όταν ισχύει $f'(x) = 0$. Θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης όλα τα κρίσιμα ή στάσιμα σημεία της.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) και υπάρχει ένα σημείο x_0 του παραπάνω διαστήματος, στο οποίο η f δεν είναι απαραίτητο να είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής στο σημείο αυτό, τότε :

- Αν ισχύει $f'(x) > 0$ στο διάστημα (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο διάστημα (x_0, β), τότε η τιμή $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f.
- Αν ισχύει $f'(x) < 0$ στο διάστημα (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο διάστημα (x_0, β), τότε η τιμή $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f.
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης και η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (α, β).

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) και υπάρχει ένα σημείο x_0 του παραπάνω διαστήματος, στο οποίο η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε :

- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Α και είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε ισχύουν τα εξής :

- Αν η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα ***κοίλα προς τα άνω*** ή είναι ***κυρτή*** στο Δ.
- Αν η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα ***κοίλα προς τα κάτω*** ή είναι ***κοίλη*** στο Δ.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε :

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του x του Δ, τότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του x του Δ, τότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ.

Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x) = x^3$, όπου $f''(x) = 6x$ και η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει πάντα.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του διαστήματος αυτού, και αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(α, x_0)$ και κοίλη στο $(x_0, β)$, ή αντίστροφα, και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται ***σημείο καμπής*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Στα σημεία καμπής, λέμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης «διαπερνάει» την καμπύλη της.

Αν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε ισχύει ότι $f''(x_0) = 0$. Οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής μιας συνάρτησης είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η f'' και τα σημεία στα οποία δεν υπάρχει η f''. Συνοψίζοντας, για να είναι ένα σημείο, σημείο καμπής μιας συνάρτησης, θα πρέπει η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του σημείου και να υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν για μια συνάρτηση *f*, ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία x = x_0 λέγεται ***κατακόρυφη ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* στο σημείο x_0. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ και τα όριά της $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$.

Αν για μια συνάρτηση *f*, ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ είναι ίσο μ’ έναν αριθμό *l*, τότε η ευθεία y = *l* λέγεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ και τα όριά της $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$.

Αν για μια συνάρτηση *f*, ένα τουλάχιστον από τα παρακάτω όρια $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]$ είναι ίσο με το 0, τότε η ευθεία y = λx + β λέγεται ***ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}$ και η ευθεία y = x. Αν λ ≠ 0, η ασύμπτωτη y = λx + β λέγεται ***πλάγια ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τις ασύμπτωτες μιας συνάρτησης, ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Η ευθεία y = λx + β είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αν και μόνο αν ισχύουν αντίστοιχα τα εξής :

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathrm{R}$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathrm{R}$.

ή

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathrm{R}$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathrm{R}$.

Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης αναζητούμε στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της όπου η συνάρτηση δεν ορίζεται, στα σημεία του πεδίου ορισμού της όπου η συνάρτηση δεν είναι συνεχής και στα σημεία $+\infty$ και $-\infty$.

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Για τον υπολογισμό των ορίων συναρτήσεων που είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, δηλαδή απροσδιόριστες μορφές, βρίσκουν εφαρμογή οι κανόνες του de l' Hospital.

Αν ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, όπου $x_0 \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, πεπερασμένο ή άπειρο, τότε ισχύει :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Αν ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, όπου $x_0 \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, πεπερασμένο ή άπειρο, τότε ισχύει :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για την μελέτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης πρέπει να κάνουμε τα εξής βήματα :

- Να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Να εξετάσουμε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- Να βρούμε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης και να κατασκευάσουμε τους αντίστοιχους ***πίνακες των προσήμων***. Από τα πρόσημα της πρώτης παραγώγου μπορούμε να βρούμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης, ενώ από τα πρόσημα της δεύτερης παραγώγου μπορούμε να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής.
- Μελετούμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της για να βρούμε οριακές τιμές καθώς και κατακόρυφες, οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες κλπ.
- Συγκεντρώνουμε όλα τα παραπάνω σ' έναν ***πίνακα μεταβολών*** της συνάρτησης και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Είναι καλό να κατασκευάσουμε και έναν ***πίνακα τιμών*** της συνάρτησης στα κρίσιμα σημεία (ρίζες, τοπικά ακρότατα, σημεία καμπής, τιμή στο σημείο (0, 0), συμπεριφορά στο $+\infty$ και $-\infty$ κ.ά.).
- Αν η συνάρτηση είναι ***άρτια***, τότε έχει ως άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, επομένως για τη μελέτη της μπορούμε να περιοριστούμε μόνο στο διάστημα όπου $x \geq 0$.
- Αν η συνάρτηση είναι ***περιττή***, τότε έχει ως κέντρο συμμετρίας την αρχή O(0, 0) των αξόνων, επομένως για τη μελέτη της μπορούμε να περιοριστούμε μόνο στο διάστημα όπου $x \geq 0$.
- Αν η συνάρτηση είναι ***περιοδική*** με περίοδο Τ, τότε για τη μελέτη της μπορούμε να περιοριστούμε μόνο σ' ένα διάστημα πλάτους Τ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x}$.

   (Απ. $\dfrac{\alpha x^2-\gamma}{x^2}$*).*
2. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=e^{x\eta\mu x}$.
3. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=xe^x$. *(Απ. $(\nu+x)e^x$).*
4. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = συν2xημx.
5. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x\eta\mu\dfrac{1}{x}$.
6. Αν μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R είναι άρτια, τότε να αποδειχθεί ότι η f' είναι περιττή.
7. Αν μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R είναι περιττή, τότε να αποδειχθεί ότι η f' είναι άρτια.
8.
9. Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = lnx, στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων (0, 0). *(Απ. είναι το σημείο (e, 1)).*
10. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης y = x^2, στα οποία οι εφαπτόμενες να είναι μεταξύ τους παράλληλες.
11. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (ξ, f(ξ)) και (–ξ, 0) εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ στο πρώτο σημείο.
12. Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες στο κοινό σημείο (1, 1) των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων x^2 και $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2}$ είναι κάθετες μεταξύ τους.
13. Να βρεθούν τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = x^3 – 3x + 5, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία y = 9x + 1.
14. Να βρεθούν τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = x^3 – 3x + 5, στα οποία η εφαπτομένη είναι κάθετη προς την ευθεία y = –x.
15. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = x^2 που άγεται από το σημείο (0, –1). *(Απ. y = 2x – 1 και y = –2x – 1).*
16. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ $\in$ R για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = αx^2 + βx + γ διέρχεται από το σημείο (1, 2) και εφάπτεται της ευθείας y = x στην αρχή των αξόνων. *(Απ. α=1, β=1, γ=0).*

17. Να βρεθούν οι τιμές των α και $\beta \in R$ για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη ίση με 1. *(Απ. α=0, β=–1)*.
18. Να αποδειχθεί με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων 2^x και $-x^2 + 2x + 1$ έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία, τα (0, 1) και (1, 2).
19. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in R^*$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.
20. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = ημx – xσυνx$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
21. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 2ημx + εφx – 3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$.
22. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
23. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
24. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x^x$, όπου $x > 0$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
25. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = 2ημx – x + 3$, όπου $x \in [0, \pi]$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
26. Να αποδειχθεί ότι αν για την συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει $2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$, τότε η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
27. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η παρακάτω συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης : $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$.
28. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ και να αποδειχθεί ότι τα δύο απ' αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.
29. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.
30. Να αποδειχθεί ότι αν για την συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [–2, 2], ισχύει $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, τότε η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.
31. Να βρεθεί η κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
32. Να βρεθεί η οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

33. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2+1}$.
34. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.
35. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία y = x + 1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ στο $+\infty$.
36. Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}$.
37. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$.
38. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$.
39. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2$.
40. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.
41. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = x + \eta\mu x$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.
42. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.
43. Αν $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 3$, τότε να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f στο σημείο της $(-1, 1)$ να έχει εφαπτομένη με κλίση 8.
44. Αν $f(x) = \alpha\ln x + \beta x^2 + 3$, τότε να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in R$ ώστε η ευθεία $2x - y + 4 = 0$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$.
45. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3$ που διέρχεται από το σημείο $(0, -16)$. *(Απ. $y = 12x - 16$)*.
46. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\dfrac{\beta}{x}$, $\alpha\beta \neq 0$, στο σημείο της $(1, 3)$ να είναι κάθετη στην ευθεία $y = x + 1$. *(Απ. $\alpha = 1, \beta = 2$)*.
47. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \neq 0$ ώστε να είναι κάθετες οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $x^2 - x$ και $\dfrac{\alpha}{x}$ στο κοινό τους σημείο. *(Απ. $\alpha=\dfrac{9}{8}$)*.
48. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in R$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ στο σημείο της $(1, f(1))$ να είναι

εφαπτομένη και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \alpha x + 2$. *(Απ. α = 3 και α = –9).*

49. Να βρεθεί η κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $\frac{1}{x}$ και $-x^2$. *(Απ. y = –4x + 4).*
50. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης x^3 που διέρχεται από το σημείο (2, 0). *(Απ. y = 0 και y = 27x – 54).*
51. Αν για τις συναρτήσεις *f* και *g* ισχύουν $f''(x) = g''(x)$ $\forall x \in R$ και $f(0) = g(0)$, τότε να αποδειχθεί ότι $f(x) - g(x) = cx$, όπου $c \in R$, σταθερά.
52. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, να αποδειχθεί ότι αν $f'(x) = f(x)$, τότε $f(x) = ce^x$, όπου c σταθερά.
53. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + (2 - \beta + \gamma)x^2 + (\beta + \gamma)x + 1 + \beta - 2\gamma$, να βρεθούν οι τιμές των β και γ ώστε να υπάρχει σημείο $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο που η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο αυτό να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x και η γραφική παράσταση της συνάρτησης να διέρχεται από το σημείο (1, 6).
54. Αν για τη συνάρτηση *f* ισχύει $f''(x) + f(x) = 0$ $\forall x \in R$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$ είναι σταθερή.