ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οι μιγαδικοί αριθμοί δημιουργήθηκαν από την ανάγκη επίλυσης μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού όταν η διακρίνουσά της Δ είναι < 0, οπότε η εξίσωση δεν έχει λύση στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών. Το γενικότερο πρόβλημα βέβαια είναι ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου η άρτια δύναμη να είναι αρνητικός αριθμός.

Δεχόμαστε λοιπόν ότι υπάρχει ένα φανταστικό στοιχείο i, τέτοιο ώστε να ισχύει $i^2=-1$ και ένα διευρυμένο σύνολο C, υπερσύνολο του R, που αποκαλείται ***σύνολο των μιγαδικών αριθμών*** και περιέχει τα εξής :

- Το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.
- Τα στοιχεία βi, όπου $\beta \in R$ και $\beta \neq 0$, δηλ. όλα τα γινόμενα των στοιχείων του συνόλου R με το i, που αποκαλούνται ***φανταστικοί αριθμοί*** και το σύνολό τους συμβολίζεται με το I, και
- Όλα τα στοιχεία (αθροίσματα) της μορφής α+βi, όπου $\alpha, \beta \in R$ και $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, που αποκαλούνται ***καθαροί μιγαδικοί αριθμοί***.

Ισχύουν τα εξής :

- $i^2 = -1$
- $(-i)^2 = -1$
- $\sqrt{-1} = \pm i$
- $\sqrt{\alpha} = \pm i\sqrt{|\alpha|}$, όπου $\alpha \in R^-$
- $R \subset C$
- $I \subset C$
- $R \cap I = \varnothing$
- $(R \cup I) \subset C$

Στο σύνολο C ισχύουν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και μάλιστα έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο σύνολο R. Ακόμη, το μηδέν 0 = (0, 0) = 0+0i είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα 1 = (1, 0) = 1+0i είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Τα στοιχεία του συνόλου C τα συμβολίζουμε συνήθως με το γράμμα z και κάθε στοιχείο του C μπορεί να γραφεί κατά έναν και μοναδικό τρόπο με τη μορφή z=α+βi, όπου $\alpha, \beta \in R$. Ένας μιγαδικός αριθμός αποτελείται στην ουσία από τη σύνθεση (συνδυασμό) δύο αριθμών, ενός πραγματικού, του α, και ενός φανταστικού, του βi.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς και σαν διατεταγμένη ζεύγη πραγματικών αριθμών της μορφής (α, β), όπου φυσικά $\alpha, \beta \in R$, χωρίς να γίνεται αναφορά στο εικονικό στοιχείο i. Αυτή η παράσταση μιγαδικών αριθμών δεν χρησιμοποιείται πολύ στα Μαθηματικά, αλλά είναι βολική σε γλώσσες προγραμματισμού όπως είναι η Fortran, οι οποίες υποστηρίζουν τους μιγαδικούς αριθμούς και τις πράξεις μεταξύ τους.

Για τον μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha, \beta \in R$, ο α αποκαλείται ***πραγματικό μέρος*** του z και συμβολίζεται με ***Re(z)***, ενώ ο β αποκαλείται ***φανταστικό μέρος*** του z και συμβολίζεται με ***Im(z)***.

Ένας πραγματικός αριθμός α μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ο μιγαδικός $\alpha+0i$, ενώ ένας φανταστικός αριθμός β μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ο μιγαδικός $0+\beta i$.

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ και $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ θα λέμε ότι είναι ίσοι όταν και μόνο όταν έχουν ίσα και τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη, δηλ. όταν ισχύει : $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$. Επίσης, ένας μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$ θα είναι ίσος με το μηδέν αν και μόνο αν $\alpha=0$ και $\beta=0$.

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha_1+\beta_1 i = \alpha_2+\beta_2 i \Leftrightarrow (\alpha_1=\alpha_2 \wedge \beta_1=\beta_2) \\ \alpha+\beta i = 0 \Leftrightarrow (\alpha=0 \wedge \beta=0)\end{gathered}}$$

Στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών δεν ισχύει η διάταξη, δεν μπορούμε δηλαδή να συγκρίνουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς και να αποφανθούμε ποιος είναι μεγαλύτερος.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τους μιγαδικούς αριθμούς μπορούμε να τους παραστήσουμε γεωμετρικά με τα σημεία ενός καρτεσιανού επιπέδου, όπου μπορούμε να θεωρήσουμε τον άξονα x'x σαν άξονα των πραγματικών αριθμών και τον άξονα y'y σαν άξονα των φανταστικών αριθμών.

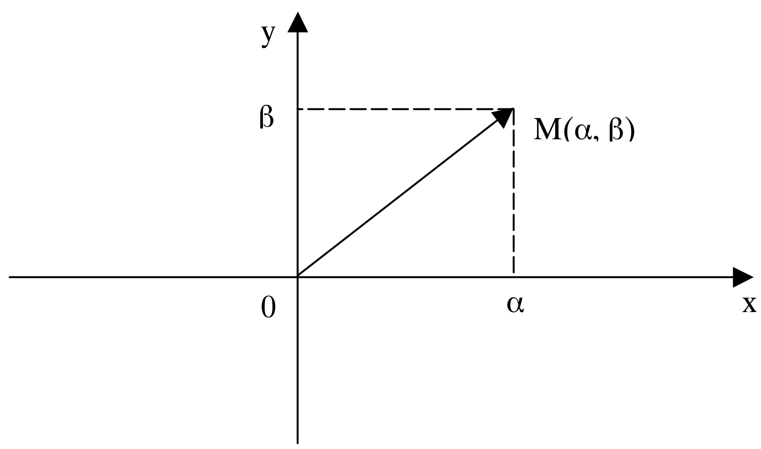
Έναν μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε με το σημείο Μ του καρτεσιανού επιπέδου που έχει τετμημένη ίση με α και τεταγμένη ίση με β και αντίστροφα, σε κάθε σημείο Μ(α, β) του καρτεσιανού επιπέδου, που έχει συντεταγμένες α και β, αντιστοιχίζεται ένας και μόνο ένας μιγαδικός αριθμός, ο $z=\alpha+\beta i$.

Υπάρχει συνεπώς μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους μιγαδικούς αριθμούς του συνόλου C και τα σημεία του καρτεσιανού επιπέδου.

Το σημείο Μ(α, β) αποκαλείται ***εικόνα*** του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ και το καρτεσιανό επίπεδο το οποίο έχει σαν σημεία εικόνες μιγαδικών αριθμών, αποκαλείται ***μιγαδικό επίπεδο***. Ο άξονας των x είναι ο ***πραγματικός άξονας*** του μιγαδικού επιπέδου, καθώς περιέχει τα σημεία με εικόνες Μ(α, 0), ενώ ο άξονας των y είναι ο ***φανταστικός άξονας*** του μιγαδικού επιπέδου, καθώς περιέχει τα σημεία με εικόνες Μ(0, β).

Το καρτεσιανό επίπεδο αποκαλείται τότε μιγαδικό ή πολικό επίπεδο ή και διάγραμμα του Argand.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ της εικόνας Μ(α, β) για να παραστήσουμε τον μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$.



ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να προσθέσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ και $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, απλά προσθέτουμε χωριστά τα πραγματικά και χωριστά τα φανταστικά τους μέρη, ως εξής :

$$z_1+z_2 = (\alpha_1+\beta_1 i) + (\alpha_2+\beta_2 i) = (\alpha_1+\alpha_2) + (\beta_1+\beta_2)i$$

Ο ***αντίθετος*** ενός μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ είναι ο μιγαδικός αριθμός που έχει αντίθετο και το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος, ως εξής :

$$-z = -(\alpha+\beta i) = -\alpha-\beta i$$

Για να αφαιρέσουμε έναν μιγαδικό αριθμό $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ από τον μιγαδικό αριθμό $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, απλά προσθέτουμε στον z_1 τον αντίθετο του z_2, ως εξής:

$$z_1-z_2 = (\alpha_1+\beta_1 i) - (\alpha_2+\beta_2 i) = (\alpha_1-\alpha_2) + (\beta_1-\beta_2)i$$

Όσον αφορά τη γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος και της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών, ισχύουν τα εξής :

- Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίση με το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.
- Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίση με τη διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ και $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, έχουμε τα εξής :

$$z_1z_2 = (\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2+\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$$

Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i\neq 0$ είναι μοναδικός και υπολογίζεται ως εξής :

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=(\alpha+\beta i)^{-1}=\frac{1}{\alpha+\beta i}=\frac{\alpha-\beta i}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)}=\frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}i$$

Για να διαιρέσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ και $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, έχουμε τα εξής :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha_1+\beta_1 \iota}{\alpha_2+\beta_2 \iota}=\frac{(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2-\beta_2 i)}{(\alpha_2+\beta_2)(\alpha_2-\beta_2 i)}=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{{\alpha_2}^2+{\beta_2}^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{{\alpha_2}^2+{\beta_2}^2}i$$

Είναι καλή τακτική να αποφεύγουμε να κρατάμε το στοιχείο i στον παρονομαστή όταν έχουμε διαίρεση μιγαδικών αριθμών, για τον ίδιο λόγο που αποφεύγουμε να κρατάμε ριζικά στον παρονομαστή όταν έχουμε διαίρεση άρρητων αριθμών.

Για τις δυνάμεις του i ισχύουν τα εξής :

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 i = -i$
- $i4 = i^2 i^2 = 1$
- $i^5 = i^4 i = i$

Βλέπουμε ότι οι δυνάμεις του i λαμβάνουν τέσσερις διαφορετικές επαναλαμβανόμενες τιμές, τις 1, i, –1 και –i, και για να υπολογίσουμε μια ακέραια δύναμη του i, έστω την i^ν, κάνουμε την ακέραια διαίρεση του ν με το 4, υπολογίζουμε το πηλίκο π και το υπόλοιπο υ και έχουμε :

$$i^\nu = i^{4\pi+\upsilon} = i^{4\pi} i^\upsilon = (i^4)^\pi i^\upsilon = i^\upsilon$$

Οπότε ανάλογα με τις τιμές που θα πάρει το υπόλοιπο υ, θα έχουμε τα εξής :

- $i^\nu=1$, αν $\upsilon=0$
- $i^\nu=i$, αν $\upsilon=1$
- $i^\nu=-1$, αν $\upsilon=2$
- $i^\nu=-i$, αν $\upsilon=3$

ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού z=α+βi καλείται ο μιγαδικός αριθμός που έχει το ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό μέρος, συμβολίζεται δε με $\bar{z}$, δηλ. ο $\bar{z} = \overline{\alpha + \beta i} = \alpha - \beta i$.

Αντισυζυγής ενός μιγαδικού αριθμού z=α+βi καλείται ο μιγαδικός αριθμός που έχει αντίθετο πραγματικό μέρος και το ίδιο φανταστικό μέρος, δηλ. ο $z_1 = -\alpha + \beta i$.

Οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί έχουν πολλές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες :

- Ο συζυγής του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός, δηλ. ισχύει :
  $\overline{\alpha - \beta i} = \alpha + \beta i$
- Το γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός και είναι ίσος με το άθροισμα των τετραγώνων του πραγματικού και του φανταστικού μέρους των αριθμών, δηλ. ισχύει :
  $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) = \alpha^2+\beta^2$
- Οι εικόνες Μ(α, β) και Μ'(α, –β) δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία που είναι συμμετρικά με άξονα συμμετρίας τον άξονα x'x των πραγματικών αριθμών.
- Το άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός, ίσος με το διπλάσιο του πραγματικού μέρους των αριθμών, δηλ. ισχύει :
  $z + \bar{z} = 2\alpha$
- Η διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι φανταστικός αριθμός, ίσος με το διπλάσιο του φανταστικού μέρους του αριθμού, δηλ. ισχύει :
  $z - \bar{z} = 2\beta i$
- Ο συζυγής του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσος με το άθροισμα των συζυγών των μιγαδικών αριθμών, δηλ. ισχύει :
  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς, δηλ. έχουμε :
  $\overline{z_1 + z_2 + ... + z_\nu} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_\nu}$
- Ο συζυγής της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσος με τη διαφορά των συζυγών των μιγαδικών αριθμών, δηλ. ισχύει :
  $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- Ο συζυγής του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσος με το γινόμενο των συζυγών των μιγαδικών αριθμών, δηλ. ισχύει :
  $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

- Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς, δηλ. έχουμε :

  $$\overline{z_1.z_2...z_\nu} = \overline{z_1}.\overline{z_2}...\overline{z_\nu}$$

- Ο συζυγής της νιοστής δύναμης ενός μιγαδικού αριθμού είναι ίσος με τη νιοστή δύναμη του συζυγούς του μιγαδικού αριθμού, δηλ. ισχύει :

  $$\overline{\left(z^\nu\right)} = \left(\overline{z}\right)^\nu$$

- Ο συζυγής του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσος με το πηλίκο των συζυγών των μιγαδικών αριθμών, δηλ. ισχύει :

  $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Αν Μ(α, β) είναι η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z=α+βi στο μιγαδικό επίπεδο, τότε αποκαλούμε ***μέτρο*** ή ***απόλυτη τιμή*** του μιγαδικού αριθμού z, την απόσταση του σημείου Μ από την αρχή των αξόνων Ο, η οποία ορίζεται ως εξής :

$$\rho = |z| = |OM| = |(\alpha, \beta)| = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Αν ο μιγαδικός αριθμός z δεν έχει φανταστικό μέρος, πρόκειται δηλαδή για πραγματικό αριθμό, τότε το μέτρο του θα είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του πραγματικού του μέρους.

Ισχύουν τα εξής :

- $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z|^2 = z.\bar{z}$
- $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$
- $|z_1.z_2 ... z_\nu| = |z_1|.|z_2| ... |z_\nu|$
- $|z^\nu| = |z|^\nu$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Επίσης, το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους. Αυτό μας διευκολύνει στην επίλυση εξισώσεων της μορφής $|z - z_0| = \rho$, όπου ρ>0, όπου τα σημεία που την επαληθεύουν είναι τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ίση με ρ.

Επίσης, η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ επαληθεύεται από τα σημεία που ανήκουν στη μεσοκάθετο του τμήματος που ενώνει τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Για έναν μιγαδικό αριθμό $z=x+yi\neq 0$, με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$, αποκαλούμε ***όρισμα*** κάθε γωνία που έχει αρχική πλευρά την ημιευθεία Οx και τελική πλευρά την ημιευθεία ΟΜ. Το όρισμα του μιγαδικού αριθμού z που βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$ αποκαλείται ***πρωτεύον*** ή ***βασικό όρισμα*** και συμβολίζεται με ***Arg(z)***.

Αν ρ είναι το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z=x+yi\neq 0$, δηλ. ισχύει $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, και θ ένα όρισμά του, τότε ο μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί και ως εξής :

$$\boxed{z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta),\ \text{όπου}\ \rho=|z|\ \wedge\ \theta=\mathrm{Arg}(z)}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός μιγαδικού αριθμού αποκαλείται ***τριγωνομετρική*** ή ***πολική μορφή μιγαδικού αριθμού***. Το μέτρο ρ και το όρισμα θ αποκαλούνται πολικές συντεταγμένες του σημείου Μ.

Δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή, αν $z_1=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2)$, τότε έχουμε το εξής :

$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\rho_1=\rho_2 \wedge \theta_1-\theta_2=2\kappa\pi,\ \text{όπου}\ \kappa\in \mathbb{Z})}$$

Το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών είναι ένας μιγαδικός αριθμός που έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων τους και όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων τους. Δηλαδή, αν $z_1=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2)$, τότε έχουμε το εξής :

$$\boxed{z_1.z_2 = \rho_1\rho_2[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)]}$$

Το παραπάνω ισχύει και για περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς, δηλ.

$$|z_1.z_2...z_\nu|=|z_1|.|z_2|...|z_\nu| \ \text{και}\ \mathrm{Arg}(z_1.z_2...z_\nu) = \mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2+...+\mathrm{Arg}z_\nu$$

Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού $z\neq 0$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός που έχει μέτρο το αντίστροφο του μέτρου του και όρισμα το αντίθετο του ορίσματός του. Δηλαδή, αν $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$, τότε έχουμε το εξής :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}[\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)]}$$

Το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών είναι ένας μιγαδικός αριθμός που έχει μέτρο το πηλίκο των μέτρων τους και όρισμα τη διαφορά των ορισμάτων τους. Δηλαδή, αν $z_1=\rho_1(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2=\rho_2(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)$, τότε έχουμε το εξής :

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1-\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)]}$$

Ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετο όρισμα με τον αριθμό. Δηλαδή, αν $z=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$, τότε έχουμε το εξής :

$$\boxed{\bar{z} = \rho[\text{συν}(-\theta)+i\text{ημ}(-\theta)]}$$

Ισχύουν και τα εξής :

- $1 = \text{συν}0+i\text{ημ}0$
- $i = \text{συν}\frac{\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{\pi}{2}$
- $-1 = \text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi$
- $-i = \text{συν}\frac{3\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{3\pi}{2}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ DE MOIVRE

Αν $z=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$ είναι η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού και $\nu\in\mathbb{Z}$, τότε η νιοστή δύναμη του z είναι ένας μιγαδικός αριθμός που έχει μέτρο τη νιοστή δύναμη του μέτρου του z και όρισμα το ν-πλάσιο του ορίσματος του z. Δηλαδή έχουμε :

$$\boxed{z^\nu = [\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)]^\nu = \rho^\nu[(\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)]}$$

Ισχύουν τα εξής :

- $z^2 = \rho^2(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^2 = \rho^2(\text{συν}2\theta+i\text{ημ}2\theta)$
- $z^3 = \rho^3(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^3 = \rho^3(\text{συν}3\theta+i\text{ημ}3\theta)$
- κοκ

Από τις παραπάνω ισότητες, μπορούμε πολύ εύκολα να βρούμε τους τριγωνομετρικούς τύπους των συν2θ, ημ2θ, συν3θ, ημ3θ κλπ.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σύμφωνα με το ***Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*** ισχύει το εξής :

«Κάθε πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού έχει ν το πλήθος ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών».

Η εξίσωση $z^\nu=1$, όπου $z\in C$ και $\nu\in N$, έχει ν σε πλήθος διαφορετικές ρίζες, τις οποίες μπορούμε να βρούμε από τον εξής τύπο :

$$z_\kappa = \sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{\nu}, \text{ όπου } \kappa = 0, 1, 2, 3, ..., \nu-1$$

Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης $z^\nu=1$ αποκαλούνται ***νιοστές ρίζες της μονάδας*** και αν θέσουμε $\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}$, τότε ισχύουν τα εξής :

- Το ω αποκαλείται ***αρχική ν-οστή ρίζα της μονάδας***.
- Οι ρίζες της εξίσωσης $z^\nu=1$ είναι οι ν διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί $1, \omega, \omega^2, \omega^3, ..., \omega^{\nu-1}$.
- $1+\omega+\omega^2+\omega^3+...+\omega^{\nu-1} = 0$
- $1.\omega.\omega^2.\omega^3...\omega^{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}$
- Οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $z^\nu=1$ σχηματίζουν ***κανονικό πολύγωνο***, το οποίο έχει ν πλευρές και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0) και ακτίνα ίση με 1.
- Η κορυφή A_0 παριστάνει τη λύση 1.
- Η επόμενη κορυφή (A_1, A_2 κοκ) παριστάνει τη λύση ω, ω^2 κοκ και έχουμε στροφή κατά γωνία $\frac{2\pi}{\nu}$ κοκ.

Η εξίσωση $z^\nu=\alpha$, όπου $z\in C$, $\nu\in N$ και $\alpha= \rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$, με $\rho>0$, έχει ν σε πλήθος διαφορετικές ρίζες, τις οποίες μπορούμε να βρούμε από τον εξής τύπο :

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\,(\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi+\theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{\nu}+\theta), \text{ όπου } \kappa = 0, 1, 2, 3, ..., \nu-1$$

Οι εικόνες των λύσεων της παραπάνω εξίσωσης $z^\nu=\alpha$ σχηματίζουν ***κανονικό πολύγωνο***, το οποίο έχει ν πλευρές και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0) και ακτίνα ίση με $\sqrt[\nu]{\rho}$, όπου $\rho=|\alpha|$.

Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι αν ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης η οποία έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του παραπάνω μιγαδικού αριθμού, δηλ. ο $\bar{z}=\alpha-\beta i$, θα είναι επίσης ρίζα της ίδιας πολυωνυμικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σημειωθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των εξής μιγαδικών αριθμών : 10, –20, 5i, –7i, 5+8i, –8+3i, 9–3i, –4–2i.
2. Ποιες είναι οι συμμετρίες που πρέπει να εφαρμόσουμε στην εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z=α+βi για να πάρουμε τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών $\bar{z}$, $-z$ και $-\bar{z}$;
3. Αν β, γ $\in$R και η μια λύση της εξίσωσης $x^2+βx+γ$ είναι η 4–3i, να βρεθούν οι τιμές των β και γ (Απ. β=–8 και γ=25).
4. Αν α, β, γ, δ $\in$R, να βρεθεί η συνθήκη ώστε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ να είναι πραγματικός αριθμός (Απ. αδ=βγ).
5. Αν ν$\in$N, να αποδειχθεί ότι ισχύει : $i^ν+i^{ν+1}+i^{ν+2}+i^{ν+3}=0$.
6. Αν z$\in$C και ισχύει $z^2=\bar{z}^2$, να αποδεχθεί ότι z$\in$R ή z$\in$I.
7. Αν z$\in$C και ισχύει $|2z-1|=|z-2|$, να βρεθεί η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z. (Απ. κύκλος με κέντρο το σημείο (0, 0) και ακτίνα 1).
8. Αν z=συνθ+iημθ και ν$\in$N, να αποδειχθεί ότι ισχύει $z^ν+z^{-ν}=2συν(νθ)$.
9. Αν z=συνθ+iημθ και ν$\in$N, να αποδειχθεί ότι ισχύει $z^ν-z^{-ν}=2iημ(νθ)$.
10. Αν ν$\in$N, να αποδειχθεί ότι ισχύει : $(1+i)^ν+(1-i)^ν=2^{\frac{\nu+2}{2}}.\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{4}$.
11. Αν ν$\in$N, να αποδειχθεί ότι ισχύει : $(1+i)^ν-(1-i)^ν=i\,2^{\frac{\nu+2}{2}}.\eta\mu\frac{\nu\pi}{4}$.
12. Να αποδειχθεί ότι ο μιγαδικός αριθμός z=συνθ+iημθ μπορεί να γραφεί στη μορφή $z=\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$, όπου λ$\in$R και να βρεθεί η τιμή του λ (Απ. $\lambda=\varepsilon\phi\frac{\theta}{2}$).
13. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης : $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\nu-1=0$. (Απ. $x=i\varepsilon\phi\frac{\kappa\pi}{\nu}$).