ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Απόλυτη τιμή ή ***μέτρο*** ενός πραγματικού αριθμού α, που συμβολίζεται με $|\alpha|$, καλείται ο ίδιος ο αριθμός α, αν $\alpha \geq 0$ και ο αντίθετός του –α, αν $\alpha < 0$.

$$\boxed{|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}}$$

Η παράσταση $|\alpha|$ είναι ένας μη αρνητικός αριθμός, δηλ. είναι πάντα θετικός ή και μηδέν. ΄Εχουμε τα εξής :

$$\boxed{|\alpha| > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0}$$

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού εκφράζει γεωμετρικά την απόσταση του αριθμού από την αρχή των αξόνων Ο.

Η απόσταση δύο αριθμών α και β πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με d(α, β) ή d(β, α) και είναι ίση με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο αριθμών, δηλαδή ισχύει :

$$\boxed{d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha) = |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|}$$

Ισχύουν τα εξής :

- $|\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$
- $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$
- $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$
- $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$
- $|-\alpha| = |\alpha|$
- $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$
- $|\alpha| = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \vee \alpha = -\beta$
- $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta \vee \alpha = -\beta$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

Για κάθε $\alpha \in R$ ισχύει :

$$\boxed{-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \text{ και } |\alpha| + \alpha \geq 0 \text{ και } |\alpha| - \alpha \geq 0}$$

$$\boxed{|\alpha|^2 = \alpha^2 \text{ και } |\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu},\ \forall\, \nu \in N}$$

$$\boxed{|\alpha|^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1},\ \forall\, \nu \in N, \text{ αν } \alpha \geq 0}$$

$$\boxed{|\alpha|^{2\nu+1} = -\alpha^{2\nu+1},\ \forall\, \nu \in N, \text{ αν } \alpha < 0}$$

$$\boxed{\sqrt{\alpha^2} = |\alpha| \text{ και } \sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}} = |\alpha|,\ \forall\, \nu \in N}$$

Για κάθε $\alpha \in R$ και $\varepsilon \in R^+$ ισχύει :

$$\boxed{|\alpha| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq \alpha \leq \varepsilon \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \varepsilon^2 \Leftrightarrow \alpha \in [-\varepsilon, +\varepsilon]}$$

$$\boxed{|\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \alpha < \varepsilon \Leftrightarrow \alpha^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \alpha \in (-\varepsilon, +\varepsilon)}$$

$$\boxed{|\alpha| \geq \varepsilon \Leftrightarrow (\alpha \geq \varepsilon \vee \alpha \leq -\varepsilon)}$$

$$\boxed{|\alpha| > \varepsilon \Leftrightarrow (\alpha > \varepsilon \vee \alpha < -\varepsilon)}$$

Για κάθε $\alpha \in R$, $x \in R$ και $\varepsilon \in R^+$ ισχύει :

$$\boxed{|x-\alpha| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \alpha-\varepsilon \leq x \leq \alpha+\varepsilon \Leftrightarrow x \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]}$$

$$\boxed{|x-\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow \alpha-\varepsilon < x < \alpha+\varepsilon \Leftrightarrow x \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)}$$

ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ, ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΠΗΛΙΚΟΥ

Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απολύτων τιμών τους *(τριγωνική ανισότητα)*.

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|, \ \forall\, \alpha\in \mathrm{R} \text{ και } \forall\, \beta\in \mathrm{R}$$

Η ισότητα $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ ισχύει μόνο όταν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι, δηλ. $\alpha\beta\ge 0$.

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απολύτων τιμών τους.

$$|\alpha-\beta| \le |\alpha|+|\beta|, \ \forall\, \alpha\in \mathrm{R} \text{ και } \forall\, \beta\in \mathrm{R}$$

Η ισότητα $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|$ ισχύει μόνο όταν οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι, δηλ. $\alpha\beta\le 0$.

Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος ν πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απολύτων τιμών τους.

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu| \le |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k\right| \le \sum_{k=1}^{\nu}|\alpha_k|$$

Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος ή και της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απολύτων τιμών τους και μεγαλύτερη ή ίση από την απόλυτη τιμή της διαφοράς των απολύτων τιμών των δύο πραγματικών αριθμών.

$$\big||\alpha|-|\beta|\big| \le |\alpha\pm\beta| \le |\alpha|+|\beta|$$

Η ισότητα $\big||\alpha|-|\beta|\big|=|\alpha+\beta|$ ισχύει μόνο όταν οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι, δηλ. $\alpha\beta\le 0$.

Η ισότητα $\big||\alpha|-|\beta|\big|=|\alpha-\beta|$ ισχύει μόνο όταν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι, δηλ. $\alpha\beta\ge 0$.

Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο πραγματικών αριθμών είναι ίση με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους.

$$\boxed{|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|,\ \forall\, \alpha \in R \text{ και } \forall\, \beta \in R}$$

Η απόλυτη τιμή του γινομένου ν πραγματικών αριθμών είναι ίση με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους.

$$\boxed{|\alpha_1.\alpha_2...\alpha_\nu| = |\alpha_1|.|\alpha_2|...|\alpha_\nu|}$$

$$\boxed{\left|\prod_{k=1}^{\nu}\alpha_k\right| = \prod_{k=1}^{\nu}|\alpha_k|}$$

Η απόλυτη τιμή της νιοστής δύναμης ενός πραγματικού αριθμού είναι ίση με τη νιοστή δύναμη της απόλυτης τιμής του αριθμού.

$$\boxed{|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu,\ \nu \in N}$$

Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο πραγματικών αριθμών είναι ίση με το πηλίκο των απολύτων τιμών τους.

$$\boxed{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|},\ \forall\, \alpha \in R \text{ και } \forall\, \beta \in R,\ \beta \neq 0}$$

Η απόλυτη τιμή της k δύναμης ενός πραγματικού αριθμού, όπου $k \in Z$, είναι ίση με την k δύναμη της απόλυτης τιμής του αριθμού.

$$\boxed{|\alpha^k| = |\alpha|^k,\ k \in Z}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $\alpha|x|+\beta=0$, όπου $\alpha,\ \beta\in R$ και $\alpha\neq 0$, έχουμε τα εξής :

$\beta=0$	Μία και μοναδική λύση : $x = 0$
$\alpha\beta<0$	Δύο λύσεις : $x = \pm\dfrac{\beta}{\alpha}$
$\alpha\beta>0$	Η εξίσωση είναι αδύνατη

Για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $\alpha|x|+\beta x+\gamma=0$, όπου $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x\geq 0$ και $x<0$.

Στην περίπτωση συνεπώς που $x\geq 0$, έχουμε να επιλύσουμε την εξίσωση $\alpha x+\beta x+\gamma=0$, για την οποία έχουμε :

$\alpha+\beta\neq 0$ και $\gamma(\alpha+\beta)\leq 0$	Μία και μοναδική λύση : $x = -\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$
$\alpha+\beta\neq 0$ και $\gamma(\alpha+\beta)>0$	Αδύνατη στο R^+
$\alpha+\beta=0$ και $\gamma\neq 0$	Αδύνατη στο R^+
$\alpha+\beta=0$ και $\gamma=0$	Αόριστη (ταυτότητα) στο R^+

Στην περίπτωση τώρα που $x<0$, έχουμε να επιλύσουμε την εξίσωση $-\alpha x+\beta x+\gamma=0$, για την οποία έχουμε :

$\alpha-\beta\neq 0$ και $\gamma(\alpha-\beta)<0$	Μία και μοναδική λύση : $x = \dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}$
$\alpha-\beta\neq 0$ και $\gamma(\alpha-\beta)\geq 0$	Αδύνατη στο R^-
$\alpha-\beta=0$ και $\gamma\neq 0$	Αδύνατη στο R^-
$\alpha-\beta=0$ και $\gamma=0$	Αόριστη (ταυτότητα) στο R^-

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $\alpha|x|^2+\beta|x|+\gamma=0$, όπου α, β, $\gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$, επειδή ισχύει $x^2 = |x|^2$, μπορούμε να θέσουμε $|x|=y$ και να ψάξουμε έτσι να βρούμε τις μη αρνητικές ρίζες της εξίσωσης δευτέρου βαθμού : $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$.

Για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma|x|+\delta=0$, όπου α, β, γ, $\delta \in R$ και $\alpha\beta \neq 0$, ελέγχουμε πρώτα αν το 0 αποτελεί ρίζα της εξίσωσης, στην ουσία δηλαδή ελέγχουμε αν $\delta=0$, και μετά διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x>0$ και $x<0$ και ψάχνουμε έτσι να βρούμε τις θετικές ή τις αρνητικές αντίστοιχα ρίζες μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Για την επίλυση ανισώσεων όπου εμφανίζονται απόλυτες τιμές του αγνώστου, προσπαθούμε να απαλλαγούμε από τα σύμβολα των απολύτων τιμών μελετώντας τα αντίστοιχα διαστήματα μεταβολής του αγνώστου. Επιλύουμε κάθε ανίσωση που θα προκύψει και εφόσον το αντίστοιχο διάστημα μεταβολής του αγνώστου την ικανοποιεί, θα αποτελεί και λύση της αρχικής ανίσωσης.

Για παράδειγμα, για να επιλύσουμε την παρακάτω ανίσωση :

$$4|x+2| + 6|x-3| - 2|x+1| + 4x - 8 > 0$$

μελετάμε τα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 3)$ και $(3, +\infty)$. Σε κάθε διάστημα τιμών του x προκύπτει και μια διαφορετική ανίσωση, την οποία επιλύουμε και αν οι λύσεις βρεθούν μέσα στα αντίστοιχα διαστήματα τιμών θα είναι και λύσεις της αρχικής ανίσωσης.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων της μορφής :

$$\begin{aligned} \alpha_1|x| + \beta_1|y| &= \gamma_1 \\ \alpha_2|x| + \beta_2|y| &= \gamma_2 \end{aligned}$$

όπου $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in R$, θέτουμε όπου $|x| = x_1$ και όπου $|y| = y_1$ και επιλύουμε κατά τα γνωστά ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Κάνουμε αποδεκτή τη λύση που θα προκύψει μόνο αν $x_1 \geq 0$ και $y_1 \geq 0$ και έτσι θα προκύψουν τέσσερα ζευγάρια λύσεων του συστήματος, που θα είναι τα εξής : (x_1, y_1), $(x_1, -y_1)$, $(-x_1, y_1)$ και $(-x_1, -y_1)$. Αν μία από τις λύσεις x_1, y_1 ή και οι δύο είναι αρνητικές, το σύστημα θα είναι αδύνατο.

Για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων της μορφής :

$$\begin{aligned} \alpha_1|x| + \beta_1|y| + \gamma_1 x + \delta_1 y &= \varepsilon_1 \\ \alpha_2|x| + \beta_2|y| + \gamma_2 x + \delta_2 y &= \varepsilon_2 \end{aligned}$$

όπου $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2 \in R$, διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις, τις : ($x \geq 0$ και $y \geq 0$), ($x \geq 0$ και $y < 0$), ($x < 0$ και $y \geq 0$) και ($x < 0$ και $y < 0$) και επιλύουμε αντίστοιχα τέσσερα συστήματα εξισώσεων, με τα x και y να είναι ανάλογα θετικά ή αρνητικά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

1. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $(\frac{x}{|x|}-1)(|x|+x)$ όταν $x\neq 0$ (Απ. 0).
2. Τι εκφράζει η παράσταση $\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)+|\alpha-\beta|]$; (Απ. το max(α, β)).
3. Τι εκφράζει η παράσταση $\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)-|\alpha-\beta|]$; (Απ. το min(α, β)).
4. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $2|x|-10=0$ (Απ. $x=5$ και $x=-5$).
5. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $3|x|+4=0$ (Απ. Αδύνατη).
6. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $4|x|+3x-14=0$ (Απ. $x=2$ και $x=-14$).
7. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $3|x|+4x-14=0$ (Απ. $x=2$).
8. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $6|x|+3x=0$ (Απ. $x=0$).
9. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $2|x|+x+7=0$ (Απ. Αδύνατη).
10. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $7|x|-7x=0$ (Απ. $x\in R^+$ και $x=0$).
11. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $8|x|+8x=0$ (Απ. $x\in R^-$ και $x=0$).
12. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $x^2-3|x|+2=0$ (Απ. $x=-1$, $x=1$, $x=-2$, $x=2$).
13. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $x^2+3|x|-10=0$ (Απ. $x=-2$, $x=2$).
14. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $x^2+7|x|+12=0$ (Απ. Αδύνατη).
15. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση : $x^2+4x-3|x|+6=0$ (Απ. $x=-1$, $x=-6$).
16. Να βρεθούν οι τιμές που θα πρέπει να λάβει η πραγματική παράμετρος λ, ώστε η εξίσωση $x^2+x+\lambda|x|+1=0$ να έχει τέσσερις σε πλήθος ρίζες, οι οποίες να είναι πραγματικές και άνισες μεταξύ τους (Απ. $\lambda<-3$).
17. Να βρεθεί η σχέση ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε η εξίσωση $\alpha|x|^3+\beta x^2+\beta|x|+\alpha=0$ να έχει το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος πραγματικών ριζών (συγκεκριμένα 6 ρίζες) (Απ. $\frac{\beta}{\alpha}<-1$).
18. Να επιλυθεί στο R η ανίσωση : $4|x+2|+6|x-3|-2|x+1|+4x-8>0$ (Απ. $x\leq -2$ ή $x\geq -\frac{5}{4}$).
19. Να επιλυθεί στο R το σύστημα των εξισώσεων :

$$4|x|-3|y|=5$$
$$9|x|+6|y|=24$$

(Απ. $(x=2, y=1)$, $(x=-2, y=1)$, $(x=2, y=-1)$, $(x=-2, y=-1)$).

20. Να επιλυθεί στο R το σύστημα των εξισώσεων :

$$5|x| + |y| = 13$$

$$6|x| - |y| = 20$$

(Απ. Αδύνατο).

21. Να επιλυθεί στο R το σύστημα των εξισώσεων :

$$5|x| + |y| + 4x - 2y = 14$$

$$6|x| - |y| - 3x + y = 18$$

(Απ. (x=6, y=40), (x= $-\frac{82}{29}$, y= $-\frac{108}{29}$)).