ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Ορισμός

Ονομάζουμε ***ακολουθία πραγματικών αριθμών*** κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου N των φυσικών αριθμών στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών. Ως σύνολο N θεωρούμε τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, ...

$$\boxed{\alpha : N \to R : \nu \to \alpha_\nu \in R}$$

Στην αντιστοιχία αυτή, οι φυσικοί αριθμοί 1, 2, 3, ... αποκαλούνται ***δείκτες***, ενώ οι εικόνες τους, που είναι οι τιμές της ακολουθίας, αποκαλούνται ***όροι*** της ακολουθίας. Ο α_1 αποκαλείται πρώτος όρος της ακολουθίας, ο α_2 δεύτερος όρος της ακολουθίας κοκ. Η έκφραση $\alpha(\nu)$ γράφεται με α_ν και αποκαλείται ο ***νιοστός όρος*** ή ***γενικός όρος*** της ακολουθίας.

Τις ακολουθίες τις συμβολίζουμε συνήθως με μικρά ελληνικά γράμματα και μ' έναν από τους εξής τρόπους :

$$\boxed{\alpha_\nu,\ \nu \in N \text{ ή } \alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, 3, \ldots \text{ ή } (\alpha_\nu),\ \nu \in N \text{ ή και πιο σύντομα : } (\alpha_\nu)}$$

Σαν γενικότερο ορισμό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ***ακολουθία*** είναι μια συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο N των φυσικών αριθμών και πεδίο τιμών ένα μη κενό σύνολο E. Εδώ, όμως, θα ασχοληθούμε μόνο με ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

Οι τιμές των όρων μιας ακολουθίας μπορεί να βρίσκονται από κάποιον τύπο που μας δίνει απευθείας τον γενικό (νιοστό) όρο α_ν της ακολουθίας ή από κάποιον αναγωγικό τύπο (αναδρομική σχέση) της ακολουθίας ή και από κάποια περιγραφή των όρων της ακολουθίας.

Παραδείγματα

- Η ακολουθία των φυσικών αριθμών, όπου οι όροι της ακολουθίας έχουν ίδιες τιμές με τους αντίστοιχους δείκτες τους, δηλ. η ακολουθία : 1, 2, 3, ... ν, ..., με γενικό (νιοστό) όρο $\alpha_\nu = \nu$.
- Η ακολουθία 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{\nu}$, ..., με γενικό (νιοστό) όρο $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$.
- Η ακολουθία όπου $\alpha_\nu = 0$, αν το ν περιττός και $\alpha_\nu = 1$, αν το ν άρτιος.
- Η ακολουθία με γενικό (νιοστό) όρο $\alpha_\nu = \frac{2\nu}{\nu + 3}$.
- Η ακολουθία όπου $\alpha_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 4$, με $\alpha_1 = 2$.
- Η ακολουθία όπου $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}$, με $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_2 = 1$.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- Ενώ το πλήθος των όρων μιας ακολουθίας είναι άπειρο, το σύνολο των όρων (τιμών) της ενδέχεται να είναι πεπερασμένο. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με α(N) και ορίζεται ως το σύνολο των πραγματικών αριθμών x, που είναι ίσοι με κάποιο όρο της ακολουθίας, δηλ.
  $\alpha(N)=\{x\in R: \exists\, \nu\in N \text{ με } \alpha_\nu=x\}$
- Επειδή, όπως ήδη γνωρίζουμε, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς και στα σημεία ενός άξονα, μπορούμε να θεωρήσουμε τους όρους μιας ακολουθίας και ως τετμημένες των σημείων ενός άξονα. Η γεωμετρική αυτή απεικόνιση είναι χρήσιμη για την καλύτερη κατανόηση ορισμένων εννοιών που χρησιμοποιούνται στις ακολουθίες, όπως είναι τα όρια, τα φράγματα κ.ά.
- Επειδή είναι πολύ πιθανό οι τιμές των όρων μιας ακολουθίας να επαναλαμβάνονται, δηλ. ένας πραγματικός αριθμός να παρουσιάζεται περισσότερες από μία φορές ως όρος μιας ακολουθίας, μπορούμε να απεικονίσουμε τους όρους μιας ακολουθίας στο καρτεσιανό επίπεδο και η γεωμετρική παράσταση της ακολουθίας να είναι τότε ένα σύνολο από ανεξάρτητα σημεία του επιπέδου $M(\nu, \alpha_\nu)$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Δύο ακολουθίες θα λέμε ότι είναι ***ίσες*** όταν και μόνο όταν είναι ίσοι οι αντίστοιχοι όροι τους, δηλαδή :

$$\boxed{(\alpha_\nu) = (\beta_\nu) \Leftrightarrow \alpha_\nu = \beta_\nu,\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}}$$

Ανάμεσα στις ακολουθίες πραγματικών αριθμών μπορούμε να ορίσουμε τις εξής πράξεις, οι οποίες δημιουργούν επίσης ακολουθίες πραγματικών αριθμών :

- ***Άθροισμα*** δύο ακολουθιών (α_ν) και (β_ν) την ακολουθία $(\alpha_\nu+\beta_\nu)$ που έχει ως γενικό όρο το άθροισμα των αντίστοιχων γενικών όρων, δηλαδή : $(\alpha_\nu) + (\beta_\nu) = (\alpha_\nu+\beta_\nu),\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}$.
- ***Διαφορά*** δύο ακολουθιών (α_ν) και (β_ν) την ακολουθία $(\alpha_\nu-\beta_\nu)$ που έχει ως γενικό όρο τη διαφορά των αντίστοιχων γενικών όρων, δηλαδή : $(\alpha_\nu) - (\beta_\nu) = (\alpha_\nu-\beta_\nu),\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}$.
- ***Γινόμενο*** ενός πραγματικού αριθμού λ με μια ακολουθία (α_ν) την ακολουθία $(\lambda\alpha_\nu)$ που έχει ως γενικό όρο το γινόμενο του λ με τον αντίστοιχο γενικό όρο (α_ν), δηλαδή : $\lambda(\alpha_\nu) = (\lambda\alpha_\nu),\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}$.
- ***Γινόμενο*** δύο ακολουθιών (α_ν) και (β_ν) την ακολουθία $(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)$ που έχει ως γενικό όρο το γινόμενο των αντίστοιχων γενικών όρων, δηλαδή : $(\alpha_\nu)\cdot(\beta_\nu) = (\alpha_\nu\cdot\beta_\nu),\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}$.
- ***Πηλίκο*** δύο ακολουθιών (α_ν) και (β_ν), όπου $\beta_\nu \neq 0\ \ \forall \nu \in \mathrm{N}$, την ακολουθία $\left(\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$ που έχει ως γενικό όρο το πηλίκο των αντίστοιχων γενικών όρων, δηλαδή : $\dfrac{(\alpha_\nu)}{(\beta_\nu)} = \left(\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right),\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}$.
- ***Απόλυτη τιμή*** μιας ακολουθίας (α_ν) την ακολουθία $(|\alpha_\nu|)$ που έχει ως γενικό όρο την απόλυτη τιμή του αντίστοιχου γενικού όρου (α_ν), δηλαδή : $|(\alpha_\nu)| = (|\alpha_\nu|),\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}$.
- ***Τετραγωνική ρίζα*** μιας ακολουθίας (α_ν), όπου $\alpha_\nu \geq 0\ \ \forall \nu \in \mathrm{N}$, την ακολουθία $\left(\sqrt{\alpha_\nu}\right)$ που έχει ως γενικό όρο την τετραγωνική ρίζα του αντίστοιχου γενικού όρου (α_ν), δηλαδή : $\sqrt{(\alpha_\nu)} = \left(\sqrt{\alpha_\nu}\right),\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}$.

ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμοί

Μια ακολουθία $α_ν$, $ν \in N$ θα λέμε ότι είναι ***άνω φραγμένη***, όταν και μόνο όταν υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός s, ώστε : $α_ν \leq s$ $\forall ν \in N$. Ο αριθμός s αλλά και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του s θα λέγεται ***άνω φράγμα*** της ακολουθίας $α_ν$, $ν \in N$.

$$(α_ν) \text{ άνω φραγμένη} \Leftrightarrow (\exists\ s \in R,\ \forall\ ν \in N,\ α_ν \leq s)$$

Μια ακολουθία $α_ν$, $ν \in N$ θα λέμε ότι είναι ***κάτω φραγμένη***, όταν και μόνο όταν υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός σ, ώστε : $α_ν \geq σ$ $\forall ν \in N$. Ο αριθμός σ αλλά και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μικρότερος του σ θα λέγεται ***κάτω φράγμα*** της ακολουθίας $α_ν$, $ν \in N$.

$$(α_ν) \text{ κάτω φραγμένη} \Leftrightarrow (\exists\ σ \in R,\ \forall\ ν \in N,\ α_ν \geq σ)$$

Μια ακολουθία $α_ν$, $ν \in N$ θα λέμε ότι είναι ***φραγμένη***, όταν και μόνο όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη, αν υπάρχουν δηλαδή δύο πραγματικοί αριθμοί σ και s, ώστε : $σ \leq α_ν \leq s$ $\forall ν \in N$. Αυτό σημαίνει ότι μια ακολουθία $α_ν$, $ν \in N$ είναι φραγμένη όταν και μόνο όταν υπάρχει ένα κλειστό διάστημα [σ, s] στο οποίο ανήκουν (βρίσκονται) όλοι οι όροι της.

$$(α_ν) \text{ φραγμένη} \Leftrightarrow (\exists\ σ \in R,\ \exists\ s \in R,\ \forall\ ν \in N,\ σ \leq α_ν \leq s)$$

Μια ακολουθία $α_ν$, $ν \in N$ θα λέμε ότι είναι ***απολύτως φραγμένη***, όταν και μόνο όταν υπάρχει ένας τουλάχιστον θετικός πραγματικός αριθμός θ, ώστε : $|α_ν| \leq θ$ $\forall ν \in N$. Ο αριθμός θ αλλά και κάθε άλλος θετικός πραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του θ θα λέγεται ***απόλυτο φράγμα*** της ακολουθίας $α_ν$, $ν \in N$.

$$(α_ν) \text{ απολύτως φραγμένη} \Leftrightarrow (\exists\ θ \in R^+,\ \forall\ ν \in N,\ |α_ν| \leq θ)$$

Μια ακολουθία που είναι φραγμένη θα είναι και απολύτως φραγμένη αλλά και αντίστροφα, μια ακολουθία που είναι απολύτως φραγμένη θα είναι και φραγμένη. Αυτό ισχύει γιατί αρκεί να θεωρήσουμε ως θ τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς $|σ|$ και $|s|$.

Παραδείγματα

Η ακολουθία $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}$, $\nu\in N$ είναι φραγμένη, καθώς ισχύει : $0\le\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}\le 1$, $\forall\,\nu\in N$. Άρα όλοι οι όροι της βρίσκονται στο κλειστό διάστημα [0, 1].

Η ακολουθία $\alpha_\nu=\frac{\eta\mu\nu}{\nu}$, $\nu\in N$ είναι φραγμένη γιατί είναι απολύτως φραγμένη, καθώς ισχύει : $|\alpha_\nu|=\left|\frac{\eta\mu\nu}{\nu}\right|\le\frac{1}{\nu}\le 1$, $\forall\,\nu\in N$.

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμοί

Μια ακολουθία α_ν, $\nu\in N$ θα λέμε ότι είναι ***αύξουσα*** και θα την συμβολίζουμε ως $(\alpha_\nu)\uparrow$, όταν και μόνο όταν ισχύει : $\alpha_\nu\le\alpha_{\nu+1}$, $\forall\,\nu\in N$.

$$\boxed{(\alpha_\nu)\text{ αύξουσα} \Leftrightarrow (\alpha_\nu\le\alpha_{\nu+1},\ \forall\ \nu\in N)}$$

Μια ακολουθία α_ν, $\nu\in N$ θα λέμε ότι είναι ***γνησίως αύξουσα*** και θα την συμβολίζουμε ως $(\alpha_\nu)\uparrow$, όταν και μόνο όταν ισχύει : $\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}$, $\forall\,\nu\in N$.

$$\boxed{(\alpha_\nu)\text{ γνησίως αύξουσα} \Leftrightarrow (\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1},\ \forall\ \nu\in N)}$$

Μια ακολουθία α_ν, $\nu\in N$ θα λέμε ότι είναι ***φθίνουσα*** και θα την συμβολίζουμε ως $(\alpha_\nu)\downarrow$, όταν και μόνο όταν ισχύει : $\alpha_\nu\ge\alpha_{\nu+1}$, $\forall\,\nu\in N$.

$$\boxed{(\alpha_\nu)\text{ φθίνουσα} \Leftrightarrow (\alpha_\nu\ge\alpha_{\nu+1},\ \forall\ \nu\in N)}$$

Μια ακολουθία α_ν, $\nu\in N$ θα λέμε ότι είναι ***γνησίως φθίνουσα*** και θα την συμβολίζουμε ως $(\alpha_\nu)\downarrow$, όταν και μόνο όταν ισχύει : $\alpha_\nu>\alpha_{\nu+1}$, $\forall\,\nu\in N$.

$$\boxed{(\alpha_\nu)\text{ γνησίως φθίνουσα} \Leftrightarrow (\alpha_\nu>\alpha_{\nu+1},\ \forall\ \nu\in N)}$$

Μια ακολουθία α_ν, $\nu\in N$ θα λέμε ότι είναι ***σταθερά***, όταν και μόνο όταν ισχύει : $\alpha_\nu=\alpha_{\nu+1}$, $\forall\,\nu\in N$.

$$\boxed{(\alpha_\nu)\text{ σταθερά} \Leftrightarrow (\alpha_\nu=\alpha_{\nu+1},\ \forall\ \nu\in N)}$$

Μια ακολουθία α_ν, $\nu \in N$ που ανήκει σε κάποια από τις παραπάνω κατηγορίες, θα λέμε ότι είναι ***μονότονη ακολουθία***, ενώ αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, θα λέμε ότι είναι ***γνησίως μονότονη ακολουθία***.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- Κάθε γνησίως μονότονη ακολουθία είναι και μονότονη.
- Κάθε μονότονη ακολουθία δεν είναι κατ' ανάγκη και γνησίως μονότονη.
- Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα, τότε είναι και κάτω φραγμένη, όπου ένα κάτω φράγμα είναι ο πρώτος όρος της.
- Αν μια ακολουθία είναι φθίνουσα, τότε είναι και άνω φραγμένη, όπου ένα άνω φράγμα είναι ο πρώτος όρος της.

Παραδείγματα

Η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in N$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu \in N$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η ακολουθία $\alpha_\nu = 1$, $\nu \in N$ είναι σταθερή.

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Αν α_ν, $\nu \in N$ είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών και (k_ν) μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε η ακολουθία $(\beta_\nu) = \alpha_{k_\nu}$, $\nu \in N$ ονομάζεται ***υπακολουθία*** της (α_ν).

Μια ακολουθία μπορεί να έχει άπειρες υπακολουθίες, αλλά πολύ χρήσιμες είναι συνήθως οι υπακολουθίες των ***άρτιων δεικτών*** και των ***περιττών δεικτών*** μιας ακολουθίας

Για παράδειγμα, για την ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in N$, η υπακολουθία των άρτιων δεικτών είναι η $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2\nu}, \ldots$, ενώ η υπακολουθία των περιττών δεικτών είναι η $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2\nu-1}, \ldots$

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμοί

Μια ακολουθία α_ν, $\nu \in N$ θα λέμε ότι ***συγκλίνει*** σ' έναν πραγματικό αριθμό α ή ότι ***τείνει*** στον πραγματικό αριθμό α ή ότι το ***όριο*** της ακολουθίας είναι ο πραγματικός αριθμός α και θα γράφουμε $\alpha_\nu \to \alpha$ ή $\lim\alpha_\nu = \alpha$, όταν και μόνο όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει δείκτης ν_0, που εξαρτάται συνήθως από την τιμή του ε, τέτοιος ώστε να ισχύει : $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon, \forall \nu \geq \nu_0$.

$$\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 : |\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon, \forall \nu \geq \nu_0)}$$

Στην περίπτωση που το όριο μιας ακολουθίας είναι το 0, η ακολουθία ονομάζεται ***μηδενική*** και τότε ο παραπάνω ορισμός γράφεται ως εξής :

$$\boxed{\alpha_\nu \to 0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 : |\alpha_\nu| < \varepsilon, \forall \nu \geq \nu_0)}$$

Παραδείγματα

Η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in N$ είναι μηδενική, δηλ. $\lim\alpha_\nu = 0$.

Η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\nu \in N$ είναι μηδενική, δηλ. $\lim\alpha_\nu = 0$.

Η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu + 1}$, $\nu \in N$ έχει όριο το 1, δηλ. $\lim\alpha_\nu = 1$.

Η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{a.\nu - 1}{\beta.\nu}$, $\nu \in N$ και $\beta \neq 0$, έχει όριο το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, δηλ. $\lim\alpha_\nu = \frac{\alpha}{\beta}$.

Η ακολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in N$ δεν συγκλίνει στο R.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- $\lim\alpha_\nu = \alpha \Leftrightarrow \lim(\alpha_\nu - \alpha) = 0$.
- $\lim\alpha_\nu = \alpha \Leftrightarrow \alpha_\nu = \alpha + \delta_\nu$, όπου $\lim\delta_\nu = 0$.
- Αν $\alpha_\nu = \alpha\ \forall\ \nu \geq \nu_0 \in N \Rightarrow \lim\alpha_\nu = \alpha$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

- Το όριο μιας ακολουθίας α_ν, $\nu \in N$, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.
- Αν μια ακολουθία α_ν, $\nu \in N$, έχει όριο έναν πραγματικό αριθμό α, τότε και κάθε υπακολουθία της θα έχει το ίδιο μ' αυτήν όριο.
- Αν μια υπακολουθία μιας ακολουθίας δεν συγκλίνει, τότε δεν θα συγκλίνει και η αρχική ακολουθία.
- Αν μια υπακολουθία μιας ακολουθίας έχει όριο έναν πραγματικό αριθμό α, τότε δεν συνεπάγεται ότι και η αρχική ακολουθία είναι συγκλίνουσα.
- Αν δύο υπακολουθίες μιας ακολουθίας συγκλίνουν σε διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς, τότε η αρχική ακολουθία δεν συγκλίνει.
- Η διαγραφή ή η προσθήκη πεπερασμένου πλήθους όρων μιας ακολουθίας δεν επηρεάζει τη σύγκλισή της.
- Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι και φραγμένη.
- Μια φραγμένη ακολουθία δεν είναι απαραίτητα και συγκλίνουσα.
- Αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη τότε δεν θα είναι και συγκλίνουσα.
- Η ακολουθία που ορίζεται ως το γινόμενο μιας μηδενικής επί μιας φραγμένης ακολουθίας είναι μηδενική ακολουθία.
- Αν $\lim\beta_\nu=0$ και $|\alpha_\nu| \le k.|\beta_\nu|, \forall \nu \ge \nu_1$ και $k>0$, τότε και $\lim\alpha_\nu=0$.
- Αν $\lim\beta_\nu=0$ και $|\alpha_\nu| \le |\beta_\nu|, \forall \nu \in N$, τότε και $\lim\alpha_\nu=0$.
- Αν $\lim\beta_\nu=\alpha$, $\lim\gamma_\nu=\alpha$ και $\beta_\nu \le \alpha_\nu \le \gamma_\nu, \forall \nu \ge \nu_1$, τότε και $\lim\alpha_\nu=\alpha$.
- Αν $\lim\alpha_\nu=\alpha$, $\lim\beta_\nu=\beta$ και $\alpha_\nu<\beta_\nu$, $\forall \nu \in N$, τότε $\alpha \le =\beta$.
- Αν $\lim\alpha_\nu=\alpha$ και $\alpha_\nu<s$, $\forall \nu \in N$, τότε $\alpha \le s$.
- Αν $\lim\alpha_\nu=\alpha$ και $\sigma<\alpha_\nu$, $\forall \nu \in N$, τότε $\sigma \le =\alpha$.
- Αν οι υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών μιας ακολουθίας συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό α, τότε εκεί θα συγκλίνει και η αρχική ακολουθία.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Το όριο του αθροίσματος δύο συγκλινουσών ακολουθιών είναι ίσο με το άθροισμα των ορίων τους. Θα πρέπει όμως να έχουμε υπόψη μας ότι αν το άθροισμα δύο ακολουθιών είναι συγκλίνουσα ακολουθία, αυτό δεν συνεπάγεται ότι καθεμία από τις ακολουθίες είναι συγκλίνουσα.

$$\boxed{\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = \lim\alpha_\nu + \lim\beta_\nu}$$

Το όριο της διαφοράς δύο συγκλινουσών ακολουθιών είναι ίσο με τη διαφορά των ορίων τους. Το αντίστροφο της ιδιότητας αυτής γενικά δεν ισχύει.

$$\boxed{\lim(\alpha_\nu - \beta_\nu) = \lim\alpha_\nu - \lim\beta_\nu}$$

Ισχύει και το εξής :

$$\boxed{\lim(\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \xi\lim\alpha_\nu + \eta\lim\beta_\nu}$$

Το όριο του γινομένου δύο συγκλινουσών ακολουθιών είναι ίσο με το γινόμενο των ορίων τους. Το αντίστροφο της ιδιότητας αυτής γενικά δεν ισχύει.

$$\boxed{\lim(\alpha_\nu \,.\, \beta_\nu) = \lim\alpha_\nu \,.\, \lim\beta_\nu}$$

Το όριο του πηλίκου δύο συγκλινουσών ακολουθιών είναι ίσο με το πηλίκο των ορίων τους. Θα πρέπει να ισχύει $\beta_\nu \neq 0, \ \forall \nu \in N$. Το αντίστροφο της ιδιότητας αυτής γενικά δεν ισχύει.

$$\boxed{\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\lim\alpha_\nu}{\lim\beta_\nu}}$$

Ισχύουν και τα εξής :

- $\alpha_\nu \to \alpha \Rightarrow |\alpha_\nu| \to |\alpha|$
- $\alpha_\nu \to 0 \Leftrightarrow -\alpha_\nu \to 0 \Leftrightarrow |\alpha_\nu| \to 0$
- Αν $\lim\alpha_\nu = \alpha \Rightarrow \lim\sqrt{|\alpha_\nu|} = \sqrt{|\alpha|} = \sqrt{\lim\alpha_\nu}$
- Αν $\omega \in R$ και $|\omega| < 1 \Rightarrow \alpha_\nu = \omega^\nu \to 0$
- Αν $\lim\left|\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = k < 1 \Rightarrow \alpha_\nu \to 0$
- Αν $\omega \in R$ και $|\omega| < 1 \Rightarrow \alpha_\nu = \nu^k.\omega^\nu \to 0$, $k \in Z$
- $\forall x \in R$ ισχύει : $\lim\dfrac{x^\nu}{\nu!} = 0$
- Αν $\alpha \in R^+ \Rightarrow \alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$
- $\lim\sqrt[\nu]{\nu} = 1$
- Για κάθε $x \in R$ ισχύει :
    - $\lim x^\nu = 0$, αν $|x| < 1$
    - $\lim x^\nu = +\infty$, αν $x > 1$
    - $\lim x^\nu = 1$, αν $x = 1$
    - Δεν υπάρχει αν $x \leq -1$

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ισχύει το εξής αξίωμα : *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό*. Ως συνέπεια αυτού του αξιώματος, ισχύουν τα εξής :

- Αν μια ακολουθία α_ν είναι αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα τον αριθμό s, τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει : $\lim\alpha_\nu \leq s$.
- Αν μια ακολουθία α_ν είναι φθίνουσα και έχει ως ένα κάτω φράγμα τον αριθμό σ, τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει : $\lim\alpha_\nu \geq \sigma$.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}$ είναι αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα τον αριθμό 1, άρα συγκλίνει σ' έναν αριθμό που είναι μικρότερος ή ίσος από το 1. Επίσης, η ακολουθία $\alpha_\nu = 1+\dfrac{1}{\nu}$ είναι φθίνουσα και έχει ως ένα κάτω φράγμα τον αριθμό 1, άρα συγκλίνει σ' έναν αριθμό που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γραφούν οι 10 πρώτοι όροι της ακολουθίας που ορίζεται από την αναδρομική σχέση $\alpha_{\nu+1} = 1 + \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ και $\alpha_1 = -\dfrac{13}{21}$. Τι παρατηρείτε;
2. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu-1}{\nu+1}$ είναι μονότονη και φραγμένη.
3. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$ είναι γνησίως αύξουσα, ενώ η ακολουθία $\beta_\nu = \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ είναι γνησίως φθίνουσα. (Υπ. Ανισότητα του Bernoulli).
4. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \left(\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}\right)$ είναι μηδενική.
5. Αν $\alpha, \beta \in R^+$, να αποδειχθεί ότι $\lim\left(\sqrt{(\nu+\alpha)(\nu+\beta)}-\nu\right) = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
6. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \dfrac{1+2+...+\nu}{\nu^2}$. (Απ. $\dfrac{1}{2}$).
7. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu-\sqrt{\nu}}$.
8. Να αποδειχθεί ότι $\lim \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu} = 1$.
9. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με $\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+a}$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη και έχει όριο τον αριθμό $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
10. Για την ακολουθία με $\alpha_1=0$ και $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{3\alpha_\nu+1}{4}$ να αποδειχθεί ότι είναι συγκλίνουσα, να βρεθεί το όριό της καθώς και να γραφεί ο νιοστός όρος της συναρτήσει του ν.